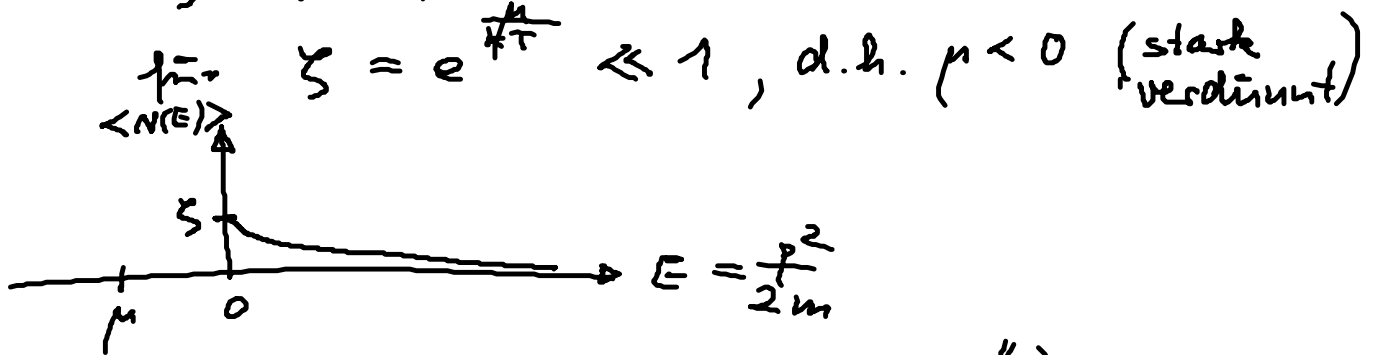
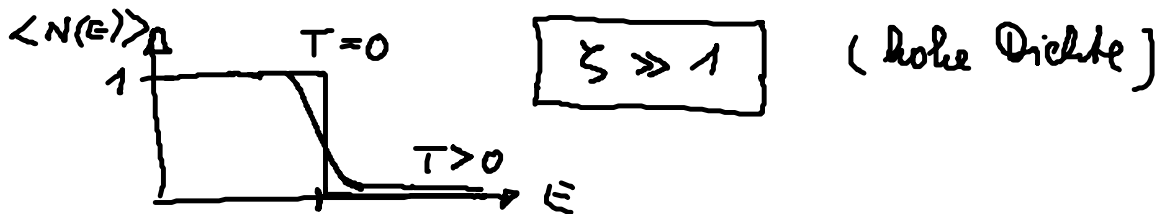


Klass. Grenzfall der Fermi-Verteilung: Nichtentastung

$$\langle N(p) \rangle = \frac{1}{\frac{1}{\zeta} \exp\left(\frac{p^2}{2mkT}\right) + 1} \approx \zeta \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right) \quad \text{Maxwell-Boltzmann}$$



Nichtklass. Grenzfall ("Fermi-Entastung") :



Gesamte Teilchenzahl:

$$\bar{N} = \frac{4\pi V}{h^3} (2S+1) \int_0^{\infty} dp p^2 \frac{1}{\exp\left\{\frac{\left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)}{kT}\right\} + 1}$$

Innere Energie

$$U = \frac{4\pi V}{h^3} (2S+1) \int_0^{\infty} dp p^2 \frac{\frac{p^2}{2m}}{\exp\left\{\frac{\left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)}{kT}\right\} + 1}$$

Substitution:

$$\frac{p^2}{2mkT} = y, \quad pdp = mkT dy, \quad \frac{\mu}{kT} = \zeta (= -\alpha)$$

(reduziertes Fermi-Niveau)

$$\bar{N} = \frac{4\pi V}{h^3} \frac{2S+1}{2} (2mkT)^{3/2} \int_0^{\infty} dy \frac{y^{1/2}}{e^{y-\alpha} + 1}$$

$$U = \frac{4\pi V}{h^3} \frac{2S+1}{2} (2mkT)^{3/2} kT \int_0^{\infty} dy \frac{y^{3/2}}{e^{y-\alpha} + 1}$$

Def. Fermi-Dirac-Integral der Ordnung s

$$F_s(\eta) := \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^\infty dy \frac{y^s}{e^{y-\eta} + 1} \quad (s > 0)$$

Entwicklung für $\eta \gg 1$ ($\cong \xi \gg 1$, d.h. Entartung):

$$\begin{aligned} \Gamma(s+1) F_s(\eta) & \stackrel{\text{part. Int.}}{=} \frac{1}{s+1} \int_0^\infty dy \underbrace{\frac{d}{dy}(y^{s+1})}_{u'} \underbrace{\frac{1}{e^{y-\eta} + 1}}_v \\ & = \frac{1}{s+1} \left[\frac{y^{s+1}}{e^{y-\eta} + 1} \right]_0^\infty + \frac{1}{s+1} \int_0^\infty dy y^{s+1} \frac{e^{-y+\eta}}{(e^{y-\eta} + 1)^2} \\ & \stackrel{x=y-\eta}{=} \frac{1}{s+1} \int_{-\eta}^\infty dx (x+\eta)^{s+1} \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

Entwicklung $(x+\eta)^{s+1} \approx \eta^{s+1} + (s+1)\eta^s x + \frac{s(s+1)}{2} \eta^{s-1} x^2 + \dots$

$$\begin{aligned} \Gamma(s+1) F_s(\eta) & \approx \frac{\eta^{s+1}}{s+1} \int_{-\infty}^\infty dx \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} + \eta^s \int_{-\infty}^\infty dx \frac{x e^x}{(e^x + 1)^2} + \frac{s}{2} \eta^{s-1} \int_{-\infty}^\infty dx \frac{x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} \\ & \quad \left[-\frac{1}{e^x + 1} \right]_{-\infty}^\infty = 1 \quad = 0, \text{ da Integrand ungerade} \quad = I = \frac{\pi^2}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_s(\eta) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \left[\frac{\eta^{s+1}}{s+1} + s \frac{\pi^2}{6} \eta^{s-1} + O(\eta^{s-3}) \right]$$

speziell:

$$F_{1/2}(\eta) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\eta^{3/2}}{3/2} + \frac{\pi^2}{12} \eta^{-1/2} \right]$$

$$F_{3/2}(\eta) \approx \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left[\frac{\eta^{5/2}}{5/2} + \frac{\pi^2}{4} \eta^{1/2} \right]$$

$$\bar{N} = \frac{4\pi V}{h^3} \frac{2s+1}{2} (2mkT)^{3/2} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\mu}{kT} \right)^{3/2} + \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{\mu}{kT} \right)^{-1/2} \right]$$

$$= \frac{2}{3} \frac{4\pi V}{h^3} \frac{2S+1}{2} (2m\mu)^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 \right] \quad (1)$$

Halbleiter : $\mu = E_F \Rightarrow n \sim E_F^{3/2}$ Fermi-Niveau

$$U = \frac{4\pi V}{h^3} \frac{2S+1}{2} (2m)^{3/2} (kT)^{5/2} \left[\frac{2}{5} \left(\frac{\mu}{kT} \right)^{5/2} + \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{\mu}{kT} \right)^{3/2} \right]$$

$$= \frac{2}{5} \frac{4\pi V}{h^3} \frac{2S+1}{2} (2m)^{3/2} \mu^{5/2} \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{3}{5} \bar{N} E_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 \right]} \quad \text{kalor. Zustandsgl.}$$

$$\boxed{pV = \frac{2}{3} U = \frac{2}{5} \bar{N} E_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 \right]} \quad \text{therm. Zustandsgl.}$$

NB: Metalle : $E_F = \mu(T=0, \bar{N}, V)$, syst. Entw. $\mu(E_F, T)$ s. Skript

Druck des Fermigasens ist um einen Faktor $\sim \frac{E_F}{kT}$ größer als in klass. idealen Gasen ($pV = NkT$)

(z.B. : $E_F \approx 1\text{eV} \hat{=} T \sim 10^4 \text{K}$!)

Grund: Pauli-Prinzip (effektive Abstoßung der Teilchen)

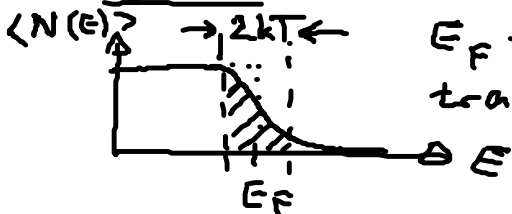
spezif. Wärme

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{\pi^2}{2} \bar{N} k \frac{kT}{E_F} \quad \text{Wärmekapazität}$$

$$\boxed{c_V = \frac{\pi^2}{2} R \frac{kT}{E_F} \sim T}$$

um Faktor $\frac{kT}{E_F}$ kleiner als in klass. idealen Gasen ($c_V = \frac{3}{2} R$)
bei $T \approx 300 \text{K}$: $\frac{1}{40}$ kleiner

Grund : Nur Teilchen in der „Aufweichungszone“ $E_F - kT < E < E_F + kT$ der Fermi-Verteilung tragen zur spezif. Wärme bei, da nur sie in freie Zustände thermisch angeregt werden können.



Zahl $\Delta N \sim \bar{N} \frac{kT}{E_F}$, jedes hat Energie $\sim kT$

$$\Rightarrow \Delta U \sim \bar{N} \frac{(kT)^2}{E_F} \Rightarrow C_V \sim \bar{N} k \frac{kT}{E_F}$$

Beispiele für entartetes Fermigas:

- Elektronen in Metallen (hohe Dichte!)
- Elektronen in Halbleitern bei hoher Dotierung oder tiefen Temp.

Nichtentartetes Fermigas

(verdünntes, nichtrelativist. Quantengas,
z.B. Elektronen in Halbleitern im Normalbereich)

Vor. $\zeta = e^{\frac{\mu}{kT}} \ll 1$ d.h. $\mu < 0$, $z = \frac{n}{n_Q} < 1$

Entwickl. des Fermi-Dirac-Integrals nach Potenzen von ζ :

$$\begin{aligned} \bar{F}_s(z) &= \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^\infty dy \frac{y^s}{e^{y^2-z} + 1} \\ &= \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^\infty dy y^s \frac{\zeta e^{-y^2}}{1 + \zeta e^{-y^2}} \\ &\approx \frac{1}{\Gamma(s+1)} \left[\underbrace{\zeta \int_0^\infty dy y^s e^{-y^2}}_{\Gamma(s+1)} - \zeta^2 \underbrace{\int_0^\infty dy y^s e^{-2y^2}}_{\frac{1}{2^{s+1}} \int_0^\infty dz z^s e^{-z}} + \dots \right] \\ &= e^{\frac{\mu}{kT}} \left[1 - \frac{1}{2^{s+1}} e^{\frac{\mu}{kT}} \right] \\ &\quad \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\ &\quad \text{Boltzmann-Limit} \qquad \text{Quantenkorrektur} \end{aligned}$$

$$\bar{N} = \frac{4\pi V}{h^3} \frac{2s+1}{2} (2mkT)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} F_{1/2}(z) = V N_C F_{1/2}\left(\frac{\mu}{kT}\right)$$

mit Entartungskonz. $N_c := (2s+1) \left(\frac{2\pi m kT}{h^2} \right)^{3/2}$

$$n \approx \frac{\bar{N}}{V} \approx N_c e^{\frac{E_F}{kT}} \left[1 - \frac{1}{2^{5/2}} e^{\frac{E_F}{kT}} \right]$$

Vollständige Nichtentartung $n \approx N_c e^{\frac{E_F}{kT}} (\ll N_c)$
(klass. Maxwell-Boltzmann) $\ll 1$

$$U = V N_c \frac{3}{2} kT F_{3/2} \left(\frac{\mu}{kT} \right) \approx \frac{3}{2} kT V N_c e^{\frac{E_F}{kT}} \left[1 - \frac{1}{2^{5/2}} e^{\frac{E_F}{kT}} \right]$$

Elim. von μ durch \bar{N} (selbstkonsistent, s. Skript) =

$$U \approx \frac{3}{2} kT \bar{N} \left[1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\bar{N}}{V N_c(T)} \right] \quad \text{kalor. Zustandsgl.}$$

↑
Quantenkorrektur
↓

$$pV = \frac{2}{3} U = kT \bar{N} \left[1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\bar{N}}{V N_c(T)} \right] \quad \text{therm. Zustandsgl.}$$

$$pv = RT \left(1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{N_A}{v N_c(T)} \right)$$

klass. id. Gas

↑
Fermi-Abstoßung
(erhöhter Druck)

v Molvol.
 N_A Avogadro-Konst.