

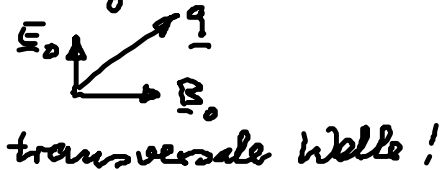
4.6 Das Photonen-gas im Strahlungshohlraum

Elektromagn. Strahlung in einem ladungs- u. stromfreien Hohlraum im thermischen Gleichgewicht:

$$\left. \begin{aligned} \underline{E}(\underline{r}, t) &= \underline{E}_0 e^{i(\underline{q}\underline{r} - \omega(\underline{q})t)} \\ \underline{B}(\underline{r}, t) &= \underline{B}_0 e^{i(\underline{q}\underline{r} - \omega(\underline{q})t)} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{ebene Wellen als} \\ \text{Lösung der Maxwellgl.} \end{array}$$

$$\text{mit } \underline{E}_0 \cdot \underline{B}_0 = 0, \quad \underline{q} \cdot \underline{E}_0 = \underline{q} \cdot \underline{B}_0 = 0$$

und $\omega(\underline{q}) = c|\underline{q}|$



Quantisierung des elektromagn. Feldes:

$$\text{harmon. Osz. der Frequenz } \omega(\underline{q}) \Rightarrow E_{\underline{q}} = \hbar\omega(\underline{q})(n_{\underline{q}} + \frac{1}{2})$$

Interpretation von $n_{\underline{q}}$ als Zahl der $n_{\underline{q}} = 0, 1, 2, \dots$
Schwingungsquanten oder Photonen mit Energie $\hbar\omega(\underline{q})$
und $\hbar\underline{q}$. Photonen sind Bosonen (da $n_{\underline{q}} = 0, 1, 2, \dots$ möglich)
mit Spin $S = 1$.

Aber: Erhaltungszustand nur 2 (2 Spinzustände)
 $\hat{=} 2$ Polarisationsrichtungen (linkszirkular u. rechtszirkular.)

$$\underline{S} \uparrow \downarrow \underline{q} \quad \underline{S} \uparrow \uparrow \underline{q}$$



Die 3. Einstellmöglichkeit des Spins tritt nicht auf
(keine „longitudinalen Photonen“, Lichtgeschw. c ,
da Ruhmasse $m_0 = 0$)

Im therm. Gleichgewicht des Photongases mit den Wänden („Hohlraumstrahlung“) werden ständig Photonen emittiert und absorbiert. Ihre Anzahl \bar{N} ist deshalb bereits durch T und V festgelegt und daher keine unabhängige Nebenbed. \Rightarrow kanon. Ensemble

Formal: Setze $\mu = 0$ in der Boseverteilung
chem. Pot.

$$\bar{N} = 2 \sum_{\underline{q}} \frac{1}{\exp\left\{\frac{\hbar\omega(\underline{q})}{kT}\right\} - 1} = 2 \sum_{\underline{q}} \langle N_{\underline{q}} \rangle$$

$$U = 2 \sum_{\underline{q}} \frac{\hbar\omega(\underline{q})}{\exp\left\{\frac{\hbar\omega(\underline{q})}{kT}\right\} - 1}$$

↑
2 Polarisationsrichtungen

Übergang zum Quasi-Kontinuum

$$2 \sum_{\underline{q}} \rightarrow \frac{2V}{h^3} \int d^3(\hbar\underline{q}) = \frac{8\pi V}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dq q^2 = \frac{8\pi V}{(2\pi)^3 c^3} \int_0^\infty d\omega \omega^2$$

$\omega = cq$

$$= \frac{8\pi V}{c^3} \int_0^\infty d\nu \nu^2 \quad \text{mit } \omega = 2\pi\nu$$

\Rightarrow Zustandsdichte der Photonen

$$\mathcal{D}(\nu) = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2$$

$$\bar{N} = \int_0^\infty d\nu \mathcal{D}(\nu) \langle N_\nu \rangle$$

$$U = \int_0^\infty d\nu \mathcal{D}(\nu) \hbar\nu \langle N_\nu \rangle$$

Spektrale Energiedichte der Strahlung:

$$u(\nu, T) := \frac{1}{V} \rho(\nu) h\nu \langle N_\nu \rangle = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Planck'sche Strahlungsformel

Grenzfälle : $h\nu \ll kT$: $u(\nu, T) \approx \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{h\nu/kT} = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 kT$

Rayleigh-Jeans-Gesetz

(klass. Resultat, $\nu \rightarrow 0$)

$$h\nu \gg kT : u(\nu, T) \sim \nu^3 e^{-a \frac{\nu}{T}}$$

(W. Wien, empir. Result, $\nu \rightarrow \infty$)

für indische Lichtquellen,
versagt für Sonne, Fixsterne

Planck'sche Ableitung der Strahlungsformel (1900)

Postulat : Strahlungsenergie gequantelt

$$E_n = n h\nu \text{ in Zustandssumme,}$$

damit konnte Max Planck erstmals die Strahlung schwarzer Körper (d.h. vollständig absorbierender Strahlungshohlräume im thermodyn. Gleichgewicht) erklären u. zwischen Rayleigh-Jeans und Wien interpolieren.

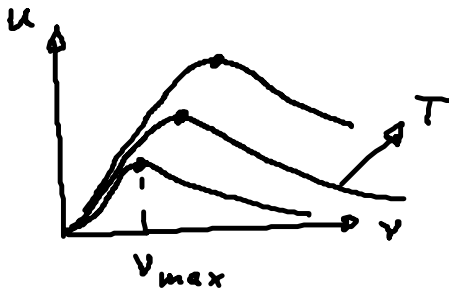
⇒ historischer Ausgangspunkt der Quantentheorie
(14.12.1900)

Maximum der spektralen Energiedichte für $h\nu \gg kT$:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \sim \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\nu^3 e^{-a \frac{\nu}{T}} \right) = \left(3 - a \frac{\nu}{T} \right) \nu^2 e^{-a \frac{\nu}{T}} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{\max} \sim T}$$

Wien'sches Verschiebungsgesetz



Gesamtenergie:

$$U(T) = V \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} d\nu \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} = V \frac{8\pi}{(ch)^3} (kT)^4 \underbrace{\int_0^{\infty} dx \frac{x^3}{e^x - 1}}_{\pi^4/15}$$

$$\boxed{U(T) = V \frac{8\pi^5}{15(ch)^3} (kT)^4}$$

Stefan-Boltzmann-Gesetz

Wärmekapazität: $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \sim T^3$

Strahlungsdruck:

Aus $p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$ folgt mit der kanon. Zustands-
summe Z

$$F = -kT \ln Z = kT \sum_{\nu} \ln(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}})$$

$$p = kT \left(\frac{\partial}{\partial V} \ln Z\right)_T = -kT \sum_{\nu} \frac{\frac{h}{kT} \left(\frac{\partial \nu}{\partial V}\right) e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}}$$

Mit dem Vol. V ändert sich die Frequenz ν einer steh. Welle

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \sim V^{-1/3}$$



$$\leftarrow V^{1/3} \rightarrow$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial V} = -\frac{1}{3} \frac{\nu}{V} \sim V^{-4/3}$$

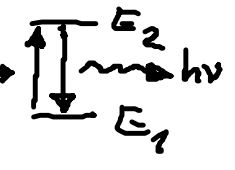
$$\Rightarrow p = \frac{1}{3V} \sum_{\nu} \frac{h\nu e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}} = \frac{1}{3V} \sum_{\nu} h\nu \langle N_{\nu} \rangle$$

$$\boxed{p = \frac{1}{3} \frac{U}{V}}$$

Strahlungsdruck

Einstein'sche Ableitung der Planck'schen Strahlungsformel (1917)

Einstein (1905): Lichtquantenhypothese \rightarrow „Photonen“
(Photoeffekt)

Im Strahlungshohlraum: 2-Niveau-Atome \rightarrow 
(Entartung g_1, g_2)

Im therm. Gleichgewicht gilt für die mittleren Besetzungszahlen der elektron. Atomniveaus (Fermionen)

$$\frac{\langle N_2 \rangle}{\langle N_1 \rangle} = \frac{g_2 p(E_2)}{g_1 p(E_1)} = \frac{g_2 e^{-\beta E_2}}{g_1 e^{-\beta E_1}} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\beta(E_2 - E_1)}$$

$p(E_i) = Z^{-1} e^{-\beta E_i}$

Im therm. Gleichgewicht werden im Mittel gleich viele Photonen emittiert u. absorbiert.

Raten (= Zahl der Übergänge pro Zeit u. Vol.):

(i) Absorption $E_1 \rightarrow E_2$: $B_{12} u(\nu, T) \langle N_1 \rangle \rightarrow \uparrow$
 \sim Photonenzahl

(ii) spontane Em. $E_2 \rightarrow E_1$: $A_{21} \langle N_2 \rangle \rightarrow \downarrow$
 $\tau = \frac{1}{A_{21}}$ Lebensdauer

(iii) erzwungene Em. $E_2 \rightarrow E_1$: $B_{21} u(\nu, T) \langle N_2 \rangle \rightarrow \downarrow$
(von Einstein neu eingeführt!)

\Rightarrow Grundlage von Masern 1954, Laser 1961)

Bilanzgl.: $B_{12} u(\nu, T) \langle N_1 \rangle = A_{21} \langle N_2 \rangle + B_{21} u(\nu, T) \langle N_2 \rangle$

$$\Rightarrow u(\nu, T) = \frac{A_{21}}{B_{12} \frac{g_1}{g_2} e^{\beta h\nu} - B_{21}}$$

Postulate : (i) $\lim_{T \rightarrow \infty} u(\nu, T) = \infty \Rightarrow \boxed{B_{12} \frac{g_1}{g_2} = B_{21}}$

$$\Rightarrow u(\nu, T) = \frac{a}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

(ii) Für $kT \gg$ gilt Rayleigh-Jeans:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 kT \Rightarrow \boxed{a = \frac{8\pi}{c^3} h\nu^3}$$

\Rightarrow Planck

NB: Verallgemeinerung auf El. System im Nichtgleichgewicht

\Rightarrow Photonen mit eff. chem. Potenzial $\mu \neq 0$

[Landsberg, J. Phys. C 14, L1025 (1981) $\mu = F_n - F_p$
 Schöll & Landsberg, J. Opt. Soc. Am. 73, 1197 (1983)]

\rightarrow Anwendung Laser

(Laserbedingung $F_n - F_p = E_{\text{Gap}}$ Halbleiterlaser)
 Differenz der quasi-Fermi-Niveaus

fern vom thermodyn. Gleichgewicht