

6. Streutheorie

6.1. Lippmann-Schwinger-Gleichung

- Es seien Teilchen betrachtet, die in WW stehen, aber keine gebundenen Zustände miteinander einnehmen

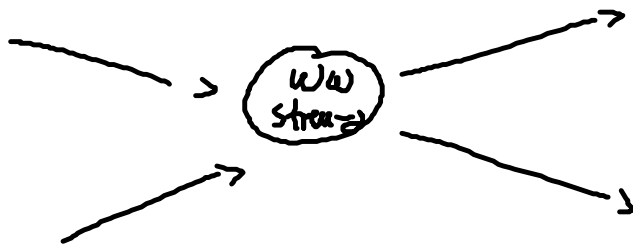
Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{H}^0 + \hat{H}^1$

\hat{H}^0 kinetische Energie

\hat{H}^1 Wechselwirkungsenergie

stationäre Streuung: $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$

$|\psi\rangle$ beschreibt am Anfang einlaufende Teilchen (ohne WW), Streuung und schließlich wieder auslaufende Teilchen



Schrödingergl. $(E - \hat{H}^0)|\psi\rangle = \hat{H}^1|\psi\rangle$

formale Lösung: $|\psi\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E - \hat{H}^0} \hat{H}^1|\psi\rangle$ (*)

↑
inverser Operator

$|\phi\rangle$: beliebige Lösung der WW-

freien gl.

Beweis: $(E - \hat{H}^0)|\psi\rangle = \underbrace{(E - \hat{H}^0)|\phi\rangle}_0 + \underbrace{(E - \hat{H}^0)}_{\mathbb{1}} \frac{1}{E - \hat{H}^0} \hat{H}^1 |\psi\rangle$

$(\hat{H}^0 - E)|\phi\rangle = 0$

⊗ ist i.d. eine Integralgleichung, z.B. in Ortsdarstellung

$$\langle r|\psi\rangle = \langle r|\phi\rangle + \iiint \langle r|\frac{1}{E - \hat{H}^0}|r'\rangle \langle r'|\hat{H}^1|r''\rangle \langle r''|\psi\rangle d^3r' d^3r''$$

Berechnung des inversen Operators $\frac{1}{E - \hat{H}^0}$ (Green'scher Operator)

Methode: Transformation auf Impulsdarstellung ($\hat{=}$ Fourier Transform) und komplexe Integration

Aber: nicht eindeutig, je nach Wahl des Integrationsweges in der komplexen Ebene, entsprechend verschiedene Randbedingungen!

Festlegung durch Hinzufügen von $+i\epsilon$ (mit $\epsilon \rightarrow 0$ am Schluss)

$$\underbrace{|\psi^+\rangle}_{\text{auslaufende Welle}} = \underbrace{|\phi\rangle}_{\text{einlauf. Welle}} + \underbrace{\frac{1}{E - \hat{H}^0 + i\epsilon} \hat{H}^1 |\psi^+\rangle}_{\text{Streuwellen}}$$

Lippmann-Schwinger-Gleichung

Green'sche Funktion des freien Teilchens
(= Ortsdarstellung des Green'schen Op.)

$$G_+(r, r') := \frac{\hbar^2}{2m} \langle r | \frac{1}{E - \hat{H}^0 + i\epsilon} | r' \rangle$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} \iint d^3q d^3q' \langle r | q \rangle \langle q | \frac{1}{E - \hat{H}^0 + i\epsilon} | q' \rangle \langle q' | r' \rangle$$

mit $\underline{q}, \underline{q}'$ Wellenvektoren ($\hbar \underline{q} \hat{=} \text{Impulsdarstellung}$)

Für freies Teilchen ($\hat{H}^0 = \frac{\hat{p}^2}{2m}$) gilt: $\langle q | \hat{H}^0 | q' \rangle = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \delta(q - q')$

$$\text{und somit } \langle q | \frac{1}{E - \hat{H}^0 + i\epsilon} | q' \rangle = \frac{\delta(q - q')}{E - \frac{\hbar^2 q^2}{2m} + i\epsilon}$$

Asymptotisch gelte für das einlaufende Teilchen (Anfangsbed.)

$$\underline{p} = \hbar \underline{k}, \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\Rightarrow \langle q | \frac{1}{E - \hat{H}^0 + i\epsilon} | q' \rangle = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{\delta(q - q')}{k^2 - q^2 + i\eta} =: \frac{2m}{\hbar^2} \hat{G}_+(q) \delta(q - q')$$

$$\text{mit } \eta := \frac{2m}{\hbar^2} \epsilon$$

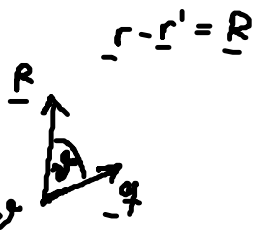
$$\text{Mit } \langle r | q \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{iqr} \text{ folgt}$$

$$G_+(r, r') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q \hat{G}_+(q) e^{iq(r - r')}$$

$$\text{mit } \hat{G}_+(q) = \frac{1}{k^2 - q^2 + i\eta}$$

Berechnung von $G_+(r-r')$ in Polarkoordinaten q :

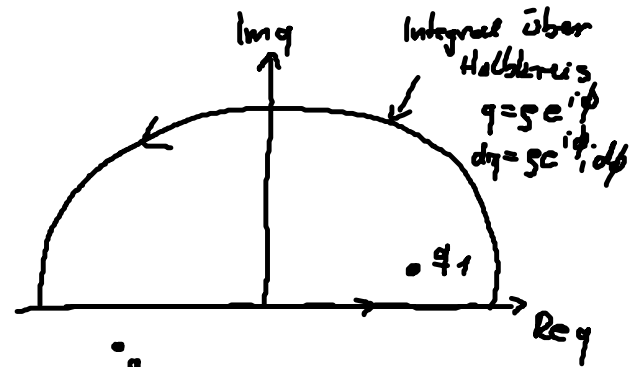
$$G_+(R) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}}}{k^2 - q^2 + i\eta}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d(\cos\vartheta) \int_0^\infty dq q^2 \frac{e^{i\varphi R \cos\vartheta}}{k^2 - q^2 + i\eta}$$


$$= \frac{1}{4\pi^2 i R} \int_0^\infty dq \frac{q^2 e^{iqR} - e^{-iqR}}{q(k^2 - q^2 + i\eta)}$$

im 2. Term $q \rightarrow -q$

$$= \frac{1}{4\pi^2 i R} \int_{-\infty}^\infty dq \frac{q e^{iqR}}{k^2 - q^2 + i\eta}$$



Integration in komplexer q -Ebene

Pole des Integranden: $q_{1,2} = \pm \sqrt{k^2 + i\eta} \approx \pm k + i\frac{\eta}{2k}$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \oint dq \frac{q e^{iqR}}{k^2 - q^2 + i\eta} = \int_{-\infty}^\infty dq \frac{q e^{iqR}}{k^2 - q^2 + i\eta} + \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_0^\pi d\phi i e^{z i \phi}$$

$$= \frac{\int_0^\pi d\phi \frac{\rho^2 e^{i\phi R \cos\phi} e^{-\rho R \sin\phi}}{k^2 - \rho^2 e^{2i\phi} + i\eta}}{\eta}$$

$\eta \rightarrow \infty : e^{-\rho R \sin\phi} \rightarrow 0$
 \Rightarrow Integral ergibt 0

Residuensatz

$$= 2\pi i \operatorname{Res} \left. \frac{q e^{iqR}}{k^2 - q^2 + i\eta} \right|_{q=q_1} \quad (\text{vom Integrationsweg eingeschlossenem Pol})$$

$$= 2\pi i \cdot \lim_{q \rightarrow q_1} \frac{(q - q_1) q e^{iqR}}{(q_1 - q_1)(q - q_2)} = -2\pi i \frac{q_1 e^{iq_1 R}}{q_1 - q_2}$$

$$q_1 = \sqrt{k^2 + i\eta}$$

$$\xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \underline{\underline{-2\pi i \frac{e^{ikR}}{2}}}$$

Für $G_+(R)$ erhält man also:

$$G_+(R) = \frac{1}{4\pi^2 i R} 2\pi i \operatorname{Res}|_{q_1} = -\frac{e^{ikR}}{4\pi R}$$

$G_+(\underline{r} - \underline{r}')$ erfüllt die Dgl. der Greenschen Fkt

$$(\Delta + k^2) G_+(\underline{r} - \underline{r}') = \delta(\underline{r} - \underline{r}')$$

$$\text{denn: } \delta(\underline{r} - \underline{r}') = \langle \underline{r} | \underline{r}' \rangle =$$

$$= \langle \underline{r} | E - \hat{H}^0 + i\epsilon \frac{1}{E - \hat{H}^0 + i\epsilon} | \underline{r}' \rangle$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} (k^2 + \Delta) \langle \underline{r} | \frac{1}{E - \hat{H}^0 + i\epsilon} | \underline{r}' \rangle$$

Ortsdarstellung der Lippmann-Schwinger-Gl.:

$$\langle \underline{r} | \psi^+ \rangle = \underbrace{\langle \underline{r} | \phi \rangle}_{\text{durchlaufende freie Welle}} + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2} \int d^3 r' G_+(\underline{r} - \underline{r}') \langle \underline{r}' | \hat{H}^1 | \psi^+ \rangle}_{\text{Streuwellen}}$$

Potenzialstreuung

\hat{H}^1 sei Potenzial, das die WW mit einem schweren Teilchen als Streuzentrum (Target) beschreibt (allg.: Schwerpunktsystem)

Ort-darstellung: $\langle \underline{r}' | \hat{H}^1 | \psi^+ \rangle = V(\underline{r}') \psi^+(\underline{r}')$

$$\Rightarrow \boxed{\psi^+(\underline{r}) = e^{i\mathbf{k}\underline{r}} - \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3 r' \frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|} V(\underline{r}') \psi^+(\underline{r}')}$$

Lippmann-Schwinger-Gl.

(äquivalent zu Schrödinger-Gl. + Randbed.)

↓
asymptot. Verhalten
für $r \rightarrow \infty$

(analog zum Huygensschen Prinzip
in der Wellenoptik: Beugung)

6.2. Streuamplitude und Streuquerschnitt

Voraussetzung: $V(\underline{r}') \xrightarrow{r' \rightarrow \infty} 0$ hinreichend rasch

(endliche Reichweite des Streupotenzials)

→ Im Integral der Lippmann-Schwinger-Gl. trägt für $r \rightarrow \infty$

der Integrand nur mit $r' \ll r$ bei.

Entwicklung von $G_+(r-r') = -\frac{e^{ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|}$ für $r \gg r'$

$$|r-r'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\underline{e}} = r \sqrt{1 - \frac{2r'r'\underline{e}}{r^2} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2} \approx r \left(1 - \frac{r'r'\underline{e}}{r^2}\right)$$

$$\approx r - \underline{e} r' \quad \text{mit } \underline{e} := \frac{\underline{r}}{r} \quad \text{Einheitsvektor in Richtung } \underline{r}$$

$$G_+(r-r') \approx -\frac{e^{ikr(1 - \frac{r'r'\underline{e}}{r^2})}}{4\pi r} \approx -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} e^{-ik(r'\underline{e})}$$

Asymptotisches Verhalten der Lipp. Schw. gl. für $|r| \rightarrow \infty$

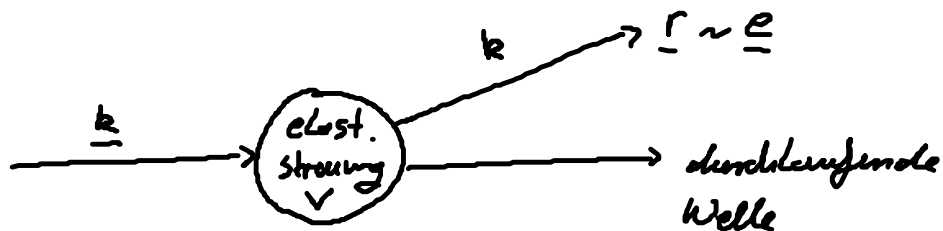
$$\psi^+(\underline{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\underline{k}\underline{r}} - \frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \int d^3r' e^{-ik(r'\underline{e})} V(r') \psi^+(\underline{r}')$$

auslaufende Kugelwelle
Streuamplitude $f(\underline{e})$

$$\psi^+(\underline{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\underline{k}\underline{r}} + f(\underline{e}) \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$f(\underline{e}) := \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \int d^3r' e^{-ik(\underline{e}\underline{r}')} V(r') \psi^+(\underline{r}')$$

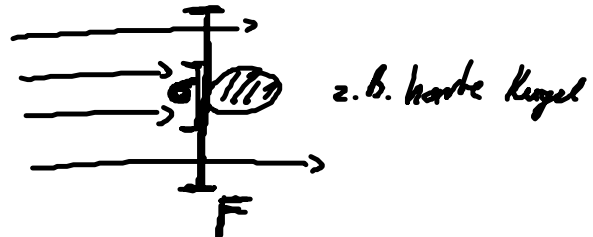
hängt ab von der Beobachtungsrichtung $\underline{e} = \frac{\underline{r}}{r}$:



Wirkungsquerschnitt

Streuung eines Teilchenstrahl an einem unendlich dünnen Streuzentrum:

$$\frac{\text{Zahl gestreuter T. /s}}{\text{Zahl einfallenden T. /s}} = \frac{\text{streuende Fläche } \sigma}{\text{Fläche } F, \text{ auf die der Strahl trifft}}$$



Verallgemeinerung für "weiche" Potentialsstreuung

$$\text{Wirkungsquerschnitt } \sigma := \frac{\text{Zahl der gestreute T. pro s}}{\text{Zahl der einf. T. pro cm}^2 \text{ pro s}}$$

diff. Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{Zahl der gestreuten T. im Raumwinkel } d\Omega \text{ pro s}}{\text{Zahl der einf. T. pro cm}^2 \text{ pro s}}$$

$$d\sigma = \frac{(\underline{j}_s)_r r^2 d\Omega}{|\underline{j}_e|}$$

Zur einlaufenden Welle $\psi_e(\underline{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\underline{r}}$ gehört die Stromdichte

$$\begin{aligned} \underline{j}_e &= \frac{\hbar}{2im} (\psi_e^* \underline{\nabla} \psi_e - \psi_e \underline{\nabla} \psi_e^*) \\ &= \frac{\hbar \mathbf{k}}{m} \end{aligned}$$

zur Streuwelle in Richtung \underline{e}

$$\psi_s(\underline{r}) = f(\underline{e}) \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$(\dot{j}_s)_r = \frac{\hbar}{2im} \left(\psi_s^* \frac{\partial}{\partial r} \psi_s - \psi_s \frac{\partial}{\partial r} \psi_s^* \right)$$

$$= \frac{\hbar k}{mr^2} |f(\underline{e})|^2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\underline{e})|^2$$

diff. Wirkungsquerschnitt