

# 6. Streutheorie

## 6.1. Lippmann-Schwinger-Gleichung

- Es seien Teilchen betrachtet, die in WW stehen, aber keine gebundenen Zustände miteinander einrechnen

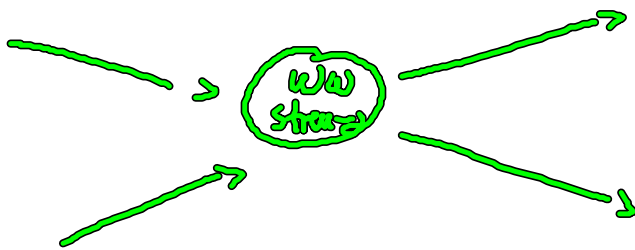
Hamiltonoperator  $\hat{H} = \hat{H}^0 + \hat{H}^1$

$\hat{H}^0$  kinetische Energie

$\hat{H}^1$  Wechselwirkungsenergie

stationäre Streuung:  $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$

$|\psi\rangle$  beschreibt am Anfang einlaufende Teilchen (ohne WW), Streuung und schließlich wieder auslaufende Teilchen



Schrödingergl.  $(E - \hat{H}^0)|\psi\rangle = \hat{H}^1|\psi\rangle$

formale Lösung:  $|\psi\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E - \hat{H}^0} \hat{H}^1 |\psi\rangle$  (\*)

↑  
inverser Operator

$|\phi\rangle$ : beliebige Lösung der WW-

freien  $\hat{H}^0$

Beweis:  $(E - \hat{H}^0)|\psi\rangle = \underbrace{(E - \hat{H}^0)|\phi\rangle}_0 + \underbrace{(E - \hat{H}^0)}_{\mathbb{1}} \frac{1}{E - \hat{H}^0} \hat{H}^1 |\psi\rangle$  
 $(\hat{H}^0 - E)|\phi\rangle = 0$

⊗ ist i.d. eine Integralgleichung, z.B. in Ortsdarstellung

$$\langle r|\psi\rangle = \langle r|\phi\rangle + \iint \langle r|\frac{1}{E - \hat{H}^0}|r'\rangle \langle r'|\hat{H}^1|r''\rangle \langle r''|\psi\rangle dr'dr''$$

Berechnung des inversen Operators  $\frac{1}{E - \hat{H}^0}$  (Green'scher Operator)

Methode: Transformation auf Impulsdarstellung (= Fourier Transform) und komplexe Integration

Aber: nicht eindeutig, je nach Wahl des Integrationsweges in der komplexen Ebene, entsprechend verschiedene Randbedingungen!

Festlegung durch Hinzufügen von  $\pm i\epsilon$  (mit  $\epsilon \rightarrow 0$  am Schluss)

$ \psi^+\rangle =  \phi\rangle + \frac{1}{E - \hat{H}^0 + i\epsilon} \hat{H}^1  \psi^+\rangle$
<div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> <div style="text-align: center;"> <p>auslaufende Welle</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>einlauf. Welle</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>Streuweite</p> </div> </div>

Lippmann-Schwinger-Gleichung

Green'sche Funktion des freien Teilchens  
(= Ortsdarstellung des Green'schen Op.)

$$G_T(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{\hbar^2}{2m} \langle \underline{r} | \frac{1}{E - \hat{H}^0 + i\epsilon} | \underline{r}' \rangle$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} \iint d^3q d^3q' \langle \underline{r} | q \rangle \langle q | \frac{1}{E - \hat{H}^0 + i\epsilon} | q' \rangle \langle q' | \underline{r}' \rangle$$

mit  $\underline{q}, \underline{q}'$  Wellenvektoren ( $\hbar \underline{q} \hat{=} \text{Impulsdarstellung}$ )

Für freies Teilchen ( $\hat{H}^0 = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ ) gilt:  $\langle q | \hat{H}^0 | q' \rangle = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \delta(q - q')$

$$\text{und somit } \langle q | \frac{1}{E - \hat{H}^0 + i\epsilon} | q' \rangle = \frac{\delta(q - q')}{E - \frac{\hbar^2 q^2}{2m} + i\epsilon}$$

Asymptotisch gelte für das einlaufende Teilchen (Anfangsbed.)

$$\underline{p} = \hbar \underline{k}, \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\Rightarrow \langle q | \frac{1}{E - \hat{H}^0 + i\epsilon} | q' \rangle = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{\delta(q - q')}{k^2 - q^2 + i\eta} =: \frac{2m}{\hbar^2} \hat{G}_T(q) \delta(q - q')$$

$$\text{mit } \eta := \frac{2m}{\hbar^2} \epsilon$$


$$\text{Mit } \langle \underline{r} | q \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{q}\cdot\underline{r}} \quad \text{folgt}$$

$$G_T(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q \hat{G}_T(q) e^{i\mathbf{q}\cdot(\underline{r} - \underline{r}')}$$

$$\text{mit } \hat{G}_T(q) = \frac{1}{k^2 - q^2 + i\eta}$$

Berechnung von  $G_+(r-r')$  in Polarkoordinaten  $q$ :

$$G_+(R) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q \frac{e^{iqR}}{k^2 - q^2 + i\eta}$$

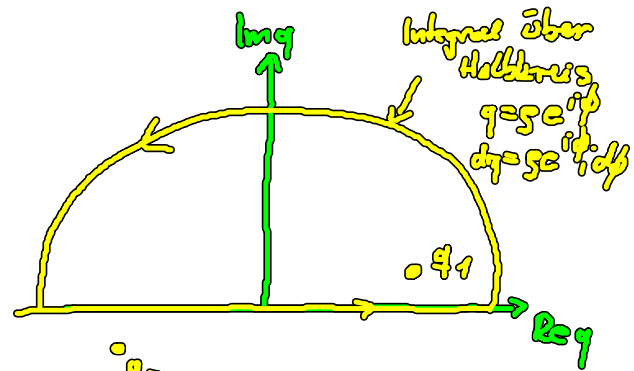
$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d(\cos\vartheta) \int_0^\infty dq q^2 \frac{e^{iqR \cos\vartheta}}{k^2 - q^2 + i\eta}$$


$r-r' = R$

$$= \frac{1}{4\pi^2 i R} \int_0^\infty dq \frac{q^2 e^{iqR} - e^{-iqR}}{q(k^2 - q^2 + i\eta)}$$

im 2. Term  $q \rightarrow -q$

$$= \frac{1}{4\pi^2 i R} \int_{-\infty}^\infty dq \frac{q e^{iqR}}{k^2 - q^2 + i\eta}$$



Integration in komplexer  $q$ -Ebene

Pole des Integranden:  $q_{1,2} = \pm \sqrt{k^2 + i\eta} \approx \pm k + i\frac{\eta}{2k}$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \oint dq \frac{q e^{iqR}}{k^2 - q^2 + i\eta} = \int_{-\infty}^\infty dq \frac{q e^{iqR}}{k^2 - q^2 + i\eta} + \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_0^\pi d\phi i e^{z i \phi}$$

$$\cdot \frac{\rho^2 e^{i\eta R \cos\phi} e^{-\eta R \sin\phi}}{k^2 - \rho^2 e^{2i\phi} + i\eta}$$

$$\eta \rightarrow 0: e^{-\eta R \sin\phi} \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$  Integral ergibt 0

Residuensatz  

$$= 2\pi i \operatorname{Res} \frac{q e^{iqR}}{k^2 - q^2 + i\eta} \Big|_{q=q_1} \quad (\text{vom Integrationsweg abgetrennter Pol})$$

$$q_1 = \sqrt{k^2 + i\eta}$$

$$= 2\pi i \cdot \lim_{q \rightarrow q_1} \frac{(q - q_1) q e^{iqR}}{(q - q_1)(q - q_2)} = -2\pi i \frac{q_1 e^{iq_1 R}}{q_1 - q_2}$$

$$\begin{aligned} \eta \rightarrow 0 \\ \rightarrow \underline{\underline{-2\pi i \frac{e^{ikR}}{2}}} \end{aligned}$$

Für  $G_+(R)$  erhält man also:

$$G_+(R) = \frac{1}{4\pi^2 i R} 2\pi i \operatorname{Res} \Big|_{q_1} = -\frac{e^{ikR}}{4\pi R}$$

$G_+(r-r')$  erfüllt die Dgl. der Greenschen Fkt

$$(\Delta + k^2) G_+(r-r') = \delta(r-r')$$

$$\text{denn: } \delta(r-r') = \langle r | r' \rangle =$$

$$= \langle r | E - \hat{H}^0 + i\epsilon \frac{1}{E - \hat{H}^0 + i\epsilon} | r' \rangle$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} (k^2 + \Delta) \langle r | \frac{1}{E - \hat{H}^0 + i\epsilon} | r' \rangle$$

Ortsdarstellung der Lippmann-Schwinger-Gl.:

$$\langle \underline{r} | \psi^+ \rangle = \underbrace{\langle \underline{r} | \phi \rangle}_{\text{durchlaufende freie Welle}} + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2} \int d^3 r' G_+(\underline{r} - \underline{r}') \langle \underline{r}' | \hat{H}^+ | \psi^+ \rangle}_{\text{Streuwellen}}$$

## Potenzialstreuung

$\hat{H}^+$  sei Potenzial, das die WW mit einem schweren Teilchen als Streuzentrum (Target) beschreibt (allg.: Schwerpunktsystem)

Ort-darstellung:  $\langle \underline{r}' | \hat{H}^+ | \psi^+ \rangle = V(\underline{r}') \psi^+(\underline{r}')$

$$\Rightarrow \psi^+(\underline{r}) = e^{ik\underline{r}} - \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3 r' \frac{e^{ik|\underline{r} - \underline{r}'|}}{4\pi|\underline{r} - \underline{r}'|} V(\underline{r}') \psi^+(\underline{r}')$$

Lippmann-Schwinger-Gl.

(äquivalent zu Schrödingergl. + Randbed.)

↓  
asymptot. Verhalten  
für  $r \rightarrow \infty$

(analog zum Huygenschen Prinzip  
in der Wellenoptik: Beugung)

## 6.2. Streuamplitude und Streuquerschnitt

Voraussetzung:  $V(\underline{r}') \xrightarrow{r' \rightarrow \infty} 0$  hinreichend rasch

(endliche Reichweite des Streupotenzials)

→ Im Integral der Lippmann-Schwinger-Gl. trägt für  $r \rightarrow \infty$

der Integrand nur mit  $r' < r$  bei.

Entwicklung von  $G_+(r-r') = -\frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}$  für  $r \gg r'$

$$|\underline{r}-\underline{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2r\underline{r}'\underline{e}} = r \sqrt{1 - \frac{2r\underline{r}'\underline{e}}{r^2} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2} \approx r \left(1 - \frac{\underline{r}'\underline{e}}{r}\right)$$

$$\approx r - \underline{e}\underline{r}' \quad \text{mit } \underline{e} := \frac{\underline{r}}{r} \quad \text{Einheitsvektor in Richtung } \underline{r}$$

$$G_+(\underline{r}-\underline{r}') \approx -\frac{e^{ikr(1-\frac{\underline{r}'\underline{e}}{r})}}{4\pi r} \approx -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} e^{-ik(\underline{r}'\underline{e})}$$

Asymptotisches Verhalten der Lipp. Schw. gl. für  $|\underline{r}| \rightarrow \infty$

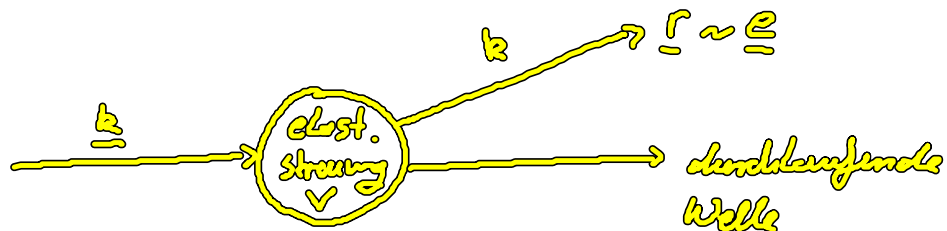
$$\psi^+(\underline{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{ik\underline{r}} - \frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \int d^3r' e^{-ik(\underline{r}'\underline{e})} V(\underline{r}') \psi^+(\underline{r}')$$

auslaufende Kugelwelle
Streuamplitude  $f(\underline{e})$

$$\psi^+(\underline{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{ik\underline{r}} + f(\underline{e}) \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$f(\underline{e}) := \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \int d^3r' e^{-ik(\underline{e}\underline{r}')} V(\underline{r}') \psi^+(\underline{r}')$$

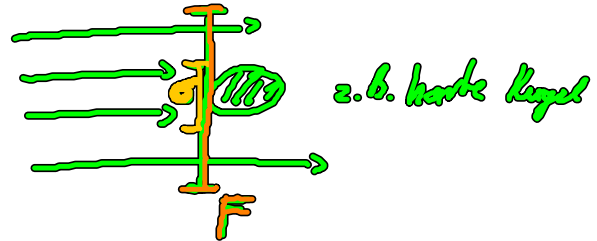
hängt ab von der Beobachtungsrichtung  $\underline{e} = \frac{\underline{r}}{r}$ :



# Wirkungsquerschnitt

Streuung eines Teilchenstrahls an einem unendlich dünnen Streuzentrum:

$$\frac{\text{Zahl gestreuter T. /s}}{\text{Zahl einfallenden T. /s}} = \frac{\text{streuende Fläche } \sigma}{\text{Fläche } F, \text{ auf die der Strahl trifft}}$$



Verallgemeinerung für "weiche" Potentials Streuung

$$\text{Wirkungsquerschnitt } \sigma := \frac{\text{Zahl der gestreute T. pro s}}{\text{Zahl der einf. T. pro cm}^2 \text{ pro s}}$$

diff. Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{Zahl der gestreuten T. im Raumwinkel } d\Omega \text{ pro s}}{\text{Zahl der einf. T. pro cm}^2 \text{ pro s}}$$

$$d\sigma = \frac{(\underline{j}_e)_r r^2 d\Omega}{|\underline{j}_e|}$$

Zur einlaufende Welle  $\psi_e(\underline{r}) = e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}$  gehört die Stromdichte

$$\begin{aligned} \underline{j}_e &= \frac{\hbar}{im} (\psi_e^* \nabla \psi_e - \psi_e \nabla \psi_e^*) \\ &= \frac{\hbar \underline{k}}{m} \end{aligned}$$



zur Streuwelle in Richtung  $\underline{e}$

$$\psi_s(\underline{r}) = f(\underline{e}) \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$(j_s)_r = \frac{\hbar}{2im} \left( \psi_s^* \frac{\partial}{\partial r} \psi_s - \psi_s \frac{\partial}{\partial r} \psi_s^* \right)$$

$$= \frac{\hbar k}{mr^2} |f(\underline{e})|^2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\underline{e})|^2$$

diff. Wirkungsquerschnitt