(weiter) 7. Relativistische Quantentheorie

d'Alembert-Operator

$$\Box := \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

mit $\frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) =: \partial_i$ kovariant

$\frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) =: \partial^i$ kontravariant

$$\Rightarrow \boxed{\Box = -\partial_i \partial^i}$$

4-Geschwindigkeit

$u^i := \frac{dx^i}{ds}$ mit $ds = (dx^i dx_i)^{1/2}$

$$= \left(c^2 dt^2 - |d\underline{r}|^2\right)^{1/2}$$

$$= c\left(1 - \left(\frac{1}{c}\frac{dr}{dt}\right)^2\right)^{1/2} dt$$

$$= c\left(1-\beta^2\right)^{1/2} dt$$

$\beta := \frac{v}{c} = \frac{1}{c}\left|\frac{dr}{dt}\right|$

$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$= \frac{c}{\gamma} dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} u^0 &= \gamma \\ u^\alpha &= \frac{\gamma}{c} v^\alpha \end{aligned}} = \frac{1}{c}\frac{dx^\alpha}{d\tau}$$

$d\tau = \frac{dt}{\gamma}$ Eigenzeit (= Zeit im momentanen Ruhesystem)

$$u^i u_i = \frac{dx^i dx_i}{(ds)^2} = 1 \qquad \text{invariant!}$$

4-Impuls $\boxed{p^i := m_0 c u^i}$ $\longrightarrow$ $p^i p_i = m_0^2 c^2 u^i u_i = m_0^2 c^2$ (*)

invariant!

$$p^0 = \frac{m_0 c^2}{c\sqrt{1-\beta^2}} \qquad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{Energie}$$

$$\boxed{p^0 = \frac{E}{c}}$$

$$\Rightarrow p^i p_i = \frac{E^2}{c^2} - \underline{p}^2 \overset{(*)}{=} (m_0 c)^2$$

$\boxed{E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 \underline{p}^2}$ relativistische Energie-Impulsbeziehung

7.2. Klein-Gordon-Gleichung

Die nichtrelativist. Schrödinger-Gl. $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi$ folgt

aus der nicht-relativist. Energie-Impuls Beziehung

$$H = \frac{1}{2m}\left(\underline{p} - e\underline{A}\right)^2 + V$$ mit der Ersetzung $\underline{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i}\nabla$

(Ortsdarstellung)

Forderungen an die relativist. Formulierung (Ortsdarstellung)

(1) Beschreibung des Zustandes durch Wellenfkt $\psi(q,t)$, wo q Bahn- und Spinvariable enthält und $|\psi(q,t)|^2$ Aufenthaltswahrsch.dichte zur Zeit t ist.

(2) Lineare Dynamik
Dgl. 1. Ordnung, damit Zeitentwicklung durch Anfangszustand $\psi(0,0)$ eindeutig bestimmt ist

(3) Physikal. Observable $\to$ hermit. Operator
Messwerte $\to$ Eigenwerte des Operators

(4) Es gibt vollständige Sätze vertauschbarer Operatoren $\hat{A}_i$ mit gemeinsamen Eigenzuständen

$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2}$ würde mit $E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, $p \to \frac{\hbar}{i} \underline{\nabla}$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \underbrace{\sqrt{m_0^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \Delta}}_{\text{nicht analyt. Fkt eines Operator}} \psi$$

Ausweg: $E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 p^2$ liefert $\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \psi = (m_0^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \Delta)\psi$

$$\boxed{\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi \equiv \Box \psi = \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2 \psi}$$ Klein-Gordon-Gl.

Lorentz-invariant, falls ψ ein Lorentz-Skalar ist, da $\Box = -\partial^i \partial_i$ Lorentz invariant ist

Einwände gegen die Klein-Gordon-Gl.:

(i) Der Spin kann nicht berücksichtigt werden, denn ein Zusatz

$$\hat{H} \longrightarrow \hat{H} - \underbrace{\underline{\mu}\,\underline{B}}_{\substack{\text{kein Skalarprodukt} \\ \text{von 4-Vektoren}}}$$

wäre nicht Lorentz-invariant!

(ii) Dgl. 2. Ordnung in t $\Longrightarrow$ Anfangsbed. $\psi(\underline{r},0)$ und $\frac{\partial \psi}{\partial t}(\underline{r},0)$ notwendig

(iii) Kontinuitätsgleichung (Wahrscheinlichkeitserhaltung)

Lorentz-invariante Form $\boxed{\partial_i j^i = 0}$ $\qquad j^i$ 4-Stromdichte

$$\frac{1}{c}\frac{\partial j^0}{\partial t} + \underbrace{\partial_\alpha j^\alpha}_{\operatorname{div} \underline{j}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad j^0 \text{ hat Bedeutung einer } \underline{\text{räumlichen Wahrscheinlichkeitsdichte}}$$

Aus der Klein-Gordon-Gl.:

(1) $$\partial^i \partial_i \psi = -\left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2 \psi \qquad \Big| \cdot \psi^*$$

folgt durch cc

(2) $$\partial^i \partial_i \psi^* = -\left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2 \psi^* \qquad \Big| \cdot \psi$$

(1) − (2) $\Longrightarrow$ $$\psi^*(\partial^i\partial_i \psi) - \psi(\partial^i \partial_i \psi^*) = -\left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2 (\psi^*\psi - \psi\psi^*) = 0$$

$$\Rightarrow \partial_i \underbrace{\left(\psi^* \partial^i \psi - \psi \partial^i \psi^* \right)}_{= \partial_i \psi^* \partial^i \psi + \underline{\psi^* \partial^i \partial_i \psi}} = 0$$

$$j^i := \psi^* \partial^i \psi - \psi \partial^i \psi^*$$

4-Stromdichte

$$\Rightarrow j^0 = \psi^* \partial^0 \psi - \psi \partial^0 \psi^* = \frac{1}{c}\left(\psi^* \dot{\psi} - \psi \dot{\psi}^* \right)$$ kann <u>nicht</u>

als räumliche Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden, da j^0 <u>negativ</u> werden kann. (stattdessen: <u>Ladungsdichte</u>)

Lösungen der Klein-Gordon-Gl. für freie Teilchen:

- $\psi = \psi_0 e^{i(\underline{k}\underline{r} - \omega t)}$ ebene Welle

$$\underline{k}\underline{r} - \omega t = -\left(\frac{\omega}{c} ct - \underline{k}\underline{r} \right) = -k^j x_j = -k_j x^j$$

mit $k^0 = \frac{\omega}{c}$

$k^\alpha = -k_\alpha$

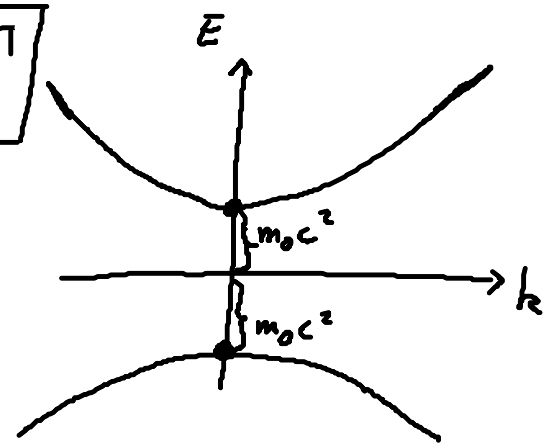
- $\psi = \psi_0 e^{-i k^j x_j}$ eingesetzt in $-\partial^i \partial_i \psi = \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 \psi$:

$$-\partial^i \partial_i \psi = i k^j \partial^i \psi_0 e^{-i k_j x^j} = k^j k_j \psi = \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 \psi$$

$$\Rightarrow k^j k_j = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \underline{k}^2 = \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2$$

$$\omega^2 = c^2\left[\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 + \underline{k}^2\right]$$

$$\boxed{E = \hbar\omega = \pm c\sqrt{m_0^2c^2 + (\hbar\underline{k})^2}}$$



Nichtrelativistischer Grenzfall: $E = \pm m_0c^2\sqrt{1+\left(\frac{\hbar k}{m_0c}\right)^2}$

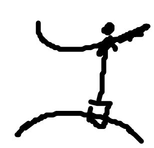
$$\approx \pm m_0c^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\hbar k}{m_0c}\right)^2\right]$$

$$= \pm\left[m_0c^2 + \frac{(\hbar k)^2}{2m_0}\right] \quad \text{für } \hbar\underline{k} \ll m_0c$$

$E > 0$: Teilchen mit Ruheenergie m_0c^2

$E < 0$: Teilchen mit Ruheenergie $-m_0c^2$ → neg. Masse

Interpretation (Dirac): alle Zustände mit $E<0$ sind im Grundzustand besetzt. Einstrahlung von Energie $> 2m_0c^2$: Teilchen-Antiteilchen-Erzeugung



Problem: relativistische QM als 1-Teilchentheorie nicht mehr konsistent

Ausweg: Vielteilchentheorie im Fockraum mit variabler Teilchenzahl
→ bereits bekannt für nichtrelativistische Schrödingergleichung

dort quantisierte Teilchen (Feldoperatoren)
+ Vertauschungsrelationen
siehe Kap. 3, 4

• Skizze für Quantisierung des Klein Gordon Feldes:

(1) Definiere Lagrangedichte $\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)\partial^\mu \phi + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar} \phi^* \phi$ (*)

so, dass die Euler Lagrange Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} = 0$$

$$\Downarrow (*) \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\frac{m_0^2 c^2}{\hbar} + \Box\right)\phi^* = 0 \qquad \left(\frac{m_0^2 c^2}{\hbar} + \Box\right)\phi = 0$$

die Klein Gordon Gleichung liefert

(2) Definierung Impulsdichte

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$$

und fordere die kanonischen Vertauschungsrelationen

$$[\phi(t,x), \Pi(t,y)] \sim \delta(x-y)$$

$$[\phi(t,x), \phi(t,y)] = 0$$

• Bem. Nur für bosonische Teilchen ergibt sich mit der Klein Gordon Gleichung eine kausale Quantenfeldtheorie

-> gut für Beschreibung der WW im Kern -

Yukawa Potenzial als Lösung