7.3 Dirac-Gleichung für Elektronen

- Die zeitliche Entwicklung soll eindeutig durch Anfangszustand $\psi(\underline{x},0)$ festgelegt sein

  $\rightarrow$ Dgl. 1. Ordnung in der Zeit t

  Lorentz-Kovarianz: Dgl. muss 1. Ordnung in $\frac{\partial}{\partial x^i}$ sein

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = -i\hbar c\, \underline{\alpha}\, \underline{\nabla}\psi + m_0 c^2 \beta \psi}$$ Dirac-Gleichung

$$\underline{\alpha}\,\underline{\nabla} = \alpha^1\partial_1 + \alpha^2\partial_2 + \alpha^3\partial_3$$

Konsequenzen

(i) Wegen Isotropie des Raumes können $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ keine Zahlen sein (sonst ist H nicht drehinvariant)

$\rightarrow$ $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ sind Matrizen (Operatoren!)
β ebenfalls Matrix

(ii) Wegen der Lorentz-Kovarianz können $\underline{\alpha}, \beta$ nicht Bahnvariable $\underline{x}$ enthalten $\rightarrow$ Spin-Operatoren (zusätzl. Freiheitsgrad)

$$\psi \in \mathcal{H} = \underbrace{\mathcal{H}_B}_{\text{Bahn}} \times \underbrace{\mathcal{H}_S}_{\text{Spin}}$$

Darstellung des Spin-Freiheitsgrades durch n-dim Spaltenvektor

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \qquad \text{(Spinor)}$$

$\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \beta$: $n \times n$ Matrizen

Es gilt $\underline{\alpha}\,\underline{p} = \underline{p}\,\underline{\alpha}$ (kommutieren)

(iii) $\hat{H}, \hat{p}$ hermitesch

$$\longrightarrow \hat{H}^+ = c\underline{p}^+\underline{\alpha}^+ + m_0 c^2 \beta^+ = c\underbrace{\underline{p}\,\underline{\alpha}^+}_{\underline{\alpha}^+\underline{p}} + m_0 c^2 \beta^+ \overset{!}{=} H$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \underline{\alpha}^+ = \underline{\alpha} \\ \beta^+ = \beta \end{matrix}\right\} \text{ hermitesch}$$

(iv) Iteration der beiden Seiten der Dirac-Gleichung $\longrightarrow$ Klein-Gordon-Gl.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = (c\underline{\alpha}\,\underline{p} + m_0 c^2 \beta)\psi$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = (c\underline{\alpha}\,\underline{p} + m_0 c^2\beta)(c\underline{\alpha}\,\underline{p} + m_0 c^2 \beta)\psi$$

$$= \left[c^2(\underline{\alpha}\,\underline{p})(\underline{\alpha}\,\underline{p}) + m_0 c^3(\underline{\alpha}\,\underline{p}\beta + \beta\underline{\alpha}\,\underline{p}) + m_0^2 c^4 \beta^2\right]\psi$$

$$= \Big[\underbrace{c^2 \sum_{\mu,\nu=1}^{3} \alpha^\mu \alpha^\nu p^\mu p^\nu}_{1} + \underbrace{m_0 c^3 \sum_{\mu=1}^{3} (\alpha^\mu \beta + \beta\alpha^\mu) p^\mu}_{3} + \underbrace{m_0^2 c^4 \beta^2}_{2}\Big]\psi$$

$$\overset{!}{=} \left[c^2 p^2 + m_0^2 c^4\right]\psi \qquad \text{Klein-Gordon-Gl.}$$

$$1 \rightarrow \sum_{\mu,\nu=1}^{3} \alpha^\mu \alpha^\nu p^\mu p^\nu = |\underline{p}|^2 \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} (\alpha^\mu)^2 = \underline{1\!\!1} \\ \alpha^\mu\alpha^\nu + \alpha^\nu\alpha^\mu = 0 \quad \mu \neq \nu \end{matrix}}$$

(2) $\rightarrow$ $\beta^2 = 1$

(3) $\rightarrow$ $\alpha^\mu \beta + \beta \alpha^\mu = 0$

α^μ, β antikommutieren!
(Betrag 1)

Matrizendarstellung von α^μ, β (als $n \times n$ Matrix)

Eigenschaften:

Eigenwerte von α^μ, β sind ± 1

$$\Big(\text{denn} \quad \alpha^\mu v = \underset{\in\mathbb{R}}{\lambda} v \longrightarrow \underbrace{(\alpha^\mu)^2}_{\mathbb{1}} v = \lambda^2 v \implies \lambda = \pm 1\Big)$$

Spur:

$$Sp(\alpha^\mu) = Sp(\beta) = 0$$

$$\Big(\underline{Sp}\,\underline{(\alpha^\mu)} = Sp(\beta^2 \alpha^\mu) \underset{\text{zykl. Vertausch.}}{=} Sp(\beta\, \underbrace{\alpha^\mu \beta}_{-\beta\alpha^\mu}) = -Sp(\beta^2 \alpha^\mu) = -\underline{Sp}\,\underline{(\alpha^\mu)}\Big)$$

$$Sp(\alpha^\mu) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \implies n \text{ gerade}$$

$\underline{\underline{n=2}}$: nicht möglich, da es nur 3 (statt 4) hermit., antikommutier. spurlose 2×2 Matrizen gibt:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Paulische Spin Matrizen

$\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \mathbb{1}$ sind Basis im $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

$\underline{\underline{n=4}}$: Minimal erforderliche Größe der Darstellung

Mögliche spezielle Wahl (Blockmatrix Darstellg):

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} \\[2em] \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \end{array}\right\} \quad 4\times 4 \text{ Matrizen}$$

$$\Rightarrow \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

Bem. In der nichtrelativist. Quantentheorie genügt 2-komponentige Spinor
Lorentz-Kovarianz erzwingt
4-komp. Spinor
→ weitere Freiheitsgrade (Teilchen/Antiteilchen)

• Kontinuitätsgleichung

$$i\hbar\dot\psi = -i\hbar c\,\alpha^\mu \partial_\mu \psi + m_0 c^2 \beta\psi \qquad \Big|\cdot\psi^+ \text{ linksmult.}$$

adjungiert:

$$-i\hbar\dot\psi^+ = i\hbar c\,\underbrace{(\alpha^\mu \partial_\mu \psi)^+}_{(\partial_\mu \psi^+)\alpha^\mu} + m_0 c^2 \underbrace{(\beta\psi)^+}_{\psi^+\beta} \qquad \Big|\cdot\psi \text{ rechtsmult.}$$

$$\overset{\text{subtr.}}{\Rightarrow} \quad i\hbar\Big(\underbrace{\psi^+\dot\psi + \dot\psi^+\psi}_{\frac{\partial}{\partial t}(\psi^+\psi)}\Big) = -i\hbar c\Big(\underbrace{\psi^+\alpha^\mu(\partial_\mu\psi) + (\partial_\mu\psi^+)\alpha^\mu\psi}_{\partial_\mu(\psi^+\alpha^\mu\psi)}\Big)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\psi^+\psi) + c\,\partial_\mu(\psi^+\alpha^\mu\psi) = 0}$$

Kontinuitätsgleichung mit

Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho = \sum_{s=1}^{4} \psi_s^* \psi_s \geq 0$

pos. definit!

Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j^\mu = c\psi^+\alpha^\mu\psi$

4-Schreibweise: $\boxed{\partial_k j^k = 0}$

mit $j^0 = c\psi^+\psi$

- **Dirac-Gleichung in kovarianter Form**

$\boxed{\text{Def.:}}$ $\gamma^0 := \beta$ $\qquad \gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu$

$\gamma^i := \beta\alpha^i$

$$-i\hbar\beta\partial_0\psi - i\hbar\beta\alpha^i\partial_i\psi + m_0 c\psi\beta^2 = 0 \qquad (\text{Dirac Gl. } \text{"}\cdot\text{"}\ \beta/c)$$

$$\boxed{\left(-i\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{m_0 c}{\hbar}\right)\psi = 0}$$

Dirac Gleichung

7.4. Der nichtrelativistische Grenzfall

a) Lösungen der Dirac-Gl. im Ruhesystem

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = m_0 c^2\beta\psi}$$

nur Ruheenergie

$$H = m_0 c^2 \beta = m_0 c^2 \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} ; \quad \beta\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ -\psi_3 \\ -\psi_4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad i\hbar \dot{\psi}_{1,2} = m_0 c^2 \psi_{1,2} \qquad : \quad \psi_{1,2} \sim e^{-i/\hbar \, m_0 c^2 t}$$

$$i\hbar \dot{\psi}_{3,4} = -m_0 c^2 \psi_{3,4} \qquad : \quad \psi_{3,4} \sim e^{+i/\hbar \, m_0 c^2 t}$$

4 lin. unabhängige Lsg.:

$$\begin{array}{ll|c|c} & & \text{Spin} & \text{Ruheenergie} \\ \psi^{(1)} = e^{-i/\hbar \, m_0 c^2 t} & e_1 & \uparrow & > 0 \\ \psi^{(2)} = e^{-i/\hbar \, m_0 c^2 t} & e_2 & \downarrow & > 0 \\ \psi^{(3)} = e^{i/\hbar \, m_0 c^2 t} & e_3 & \uparrow & < 0 \\ \psi^{(4)} = e^{i/\hbar \, m_0 c^2 t} & e_4 & \downarrow & < 0 \end{array}$$

Teilchen ($\psi^{(1)}, \psi^{(2)}$)

Antiteilchen ($\psi^{(3)}, \psi^{(4)}$)

b) Ankopplung an elektromagnet. Feld

Potenziale $\underline{A}, \phi$, e Ladung

klassisch $\quad \underline{p} \rightarrow \underline{p} - e\underline{A}$

$\qquad\qquad H \rightarrow H + e\phi$

Dirac-Gl.: $\boxed{i\hbar \dot{\psi} = \left(c\,\underline{\alpha} \left(\underline{p} - e\underline{A} \right) + m_0 c^2 \beta + e\phi \right) \psi}$

$\underline{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla \qquad$ kan. Impuls

$\pi = p_{kin} := p - eA$ kinet. Impuls

Lösungsansatz: $\psi = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix}$ } 2 Komp.: "Teilchen" $E \geq 0$ } 2 Komp.: "Antiteilchen" $E \leq 0$

$$\underline{\alpha}\,\underline{\pi}\,\psi = \sum_{\mu=1}^{3} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} \pi^\mu \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = \sum_{\mu=1}^{3} \begin{pmatrix} \sigma^\mu \pi^\mu \psi_b \\ \sigma^\mu \pi^\mu \psi_a \end{pmatrix}$$

$$\beta \psi = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_a \\ -\psi_b \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Dirac Gl. zerfällt in 2 gekoppelte, je 2 kompon. Gleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} i\hbar \dot{\psi}_a &= c \sum_{\mu=1}^{3} \sigma^\mu \pi^\mu \psi_b + (m_0 c^2 + e\phi)\psi_a \\ i\hbar \dot{\psi}_b &= c \sum_{\mu=1}^{3} \sigma^\mu \pi^\mu \psi_a + (-m_0 c^2 + e\phi)\psi_b \end{aligned}}$$

<u>Ansatz</u>

$$\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = e^{-i m_0 c^2 t/\hbar} \begin{pmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \end{pmatrix}$$

(für $E \geq 0$)

schnelle Oszillation

langsam Zeit-abhängig

$$\rightarrow i\hbar \dot{\varphi}_a = c \sum_{\mu=1}^{3} \sigma^\mu \pi^\mu \varphi_b + e\phi\,\varphi_a \qquad (1)$$

$$(i\hbar \dot{\varphi}_b) = c \sum_{\mu=1}^{3} \sigma^\mu \pi^\mu \varphi_a - 2 m_0 c^2 \varphi_b + (e\phi\,\varphi_b) \qquad (2)$$

"E"

Nichtrelativistische Näherung: $E - m_0 c^2 \ll m_0 c^2$

$\rightarrow \dot{\varphi}_b \approx 0$

$e\phi \ll m_0 c^2$

$\rightarrow e\phi\varphi_b \approx 0$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} c \sum_{\mu=1}^{3} \sigma^\mu \pi^\mu \varphi_a - 2m_0 c^2 \varphi_b \approx 0$$

$$\varphi_b \approx \frac{1}{2m_0 c} \sum_{\mu=1}^{3} \sigma^\mu \pi^\mu \varphi_a$$

$$= \frac{1}{2m_0 c} (\underline{\sigma}\,\underline{\pi})\varphi_a$$

kleine Komponente des Spinors

eingesetzt in (1)

$$i\hbar \dot{\varphi}_a \approx \left[\frac{1}{2m_0} (\underline{\sigma}\,\underline{\pi})(\underline{\sigma}\,\underline{\pi}) + e\phi\right] \varphi_a$$

es gilt: $(\underline{\sigma}\,\underline{\pi})(\underline{\sigma}\,\underline{\pi}) = (p - e\underline{A})^2 - e\hbar\,\underline{\sigma}\,\underline{B}$

"wie nicht ganz so leicht zu sehen ist"

$\rightarrow$ Übung

$$\Rightarrow \boxed{i\hbar \dot{\varphi}_a = \left[\frac{1}{2m_0}(\underline{p} - e\underline{A})^2 - \frac{e\hbar}{2m_0}\underline{\sigma}\,\underline{B} + e\phi\right]\varphi_a}$$

nichtrelativistische Pauli-gleichung für Spin $\pm\frac{\hbar}{2}$ mit dem richtigen gyromagnetischen Verhältnis $g=2$

$$\frac{e\hbar}{2m_0}\underline{\sigma} = \frac{e}{m_0} \underbrace{\frac{\hbar}{2}\sigma}_{\underline{S}} = g\frac{e}{2m_0}\underline{S}$$

Entwicklung der Dirac-Gl. für $E>0$ (1. Ordnung in $\frac{E - m_0c^2 - V}{2m_0c^2}$)

liefert Spin Bahn Kopplung

$$i\hbar\dot{\psi}_a = \left(\frac{p^2}{2m_0} - \frac{e}{2m_0}(\underline{L}+2\underline{S})\underline{B} + \frac{e^2}{2m_0}\underline{A}^2 + e\phi\right)\psi_a$$