

Theoretische Physik VI: Vertiefung (Nichtgleichgewichtstatistik)

Vorlesung WS 2010/11

E. Schöll, K. Lüdge

11 ECTS-Leistungspunkte (4 + 2 SWS)

- Masterstudiengang Physik:

Pflichtmodul Theoret. Physik V/VI

grundlagenorientiert: TP V (QM II) + TP VI (Auswahl)

anwendungsorientiert: TP V (QM II) ^{1 Schein} oder TP VI (Auswahl)
1 Schein

- kann auch als Wahlpflichtfach (8 SWS, 1 Schein, 12 ECTS) im Diplom- oder Masterstudiengang gewählt werden, zus. mit Spezialvorles. „Dynamik auf Netzwerken“ (Hövel, Mi 10-12 EW 731, ab 27.10.) oder „Nichtlin. Dyn. in Physiologie u. Medizin“ (Dahke, Mo 10-12 EW 184)

oder Sem. „Komplexe Netzwerke u. Anwendungen“
(Di 16-18 EW 731)

VL: Do + Fr 10:15 - 12:00 EW 203

Ü: Mo 12:15 - 14:00 EW 561

<http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws1011>

Inhalt der VL

1. Stoch. Prozesse
2. Klass. Statistik im Nichtgleichgewicht
3. Rauschinduzierte Oszillationen u. Muster

4. Quantenstatistik im Nichtgleichgewicht
5. Boltzmann-Gleichung
6. Rekombination u. Nichtgleichgewichtsstatistik

Lit. s. Webseite

1. Stochastische Prozesse

Grundlagen der Statistik u. Wahrscheinlichkeitsth.

1.1. Zufallsvariablen

Ereignis (event): Messergebnis von Observablen,
Mikrozustand

Math. Struktur: Ereignisalgebra \mathcal{A} (Boole'scher Verband)

Menge, \cup (Vereinigung „oder“), \cap (Durchschnitt „und“)

Axiome: für $A, B, C \in \mathcal{A}$ gilt

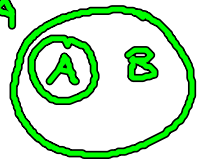
- $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ Kommut.gesetz
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ Assoz.gesetz
- $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (B \cap C) = A$ Verschmelzungsgesetz
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ Distrib.gesetz

$\exists S$ (Einselement: sicheres Ereignis): $A \cap S = A$

$\exists \emptyset$ (Nullelement: leeres Ereignis): $A \cup \emptyset = A$

$\forall A \in \mathcal{A} \exists B$: $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = S$: Komplement ($B = \bar{A}$)

Induzierte Halbordnung: $A \subseteq B$, falls $A \cap B = A$
(A impliziert B)



A und B sind disjunkt, falls $A \cap B = \emptyset$



Vollständige disjunkte Ereignismenge (sample set)

$\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ mit $A_i \cap A_j = A_i \delta_{ij}$

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = S$$

Beispiel: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ beim Würfeln

(NB: diese Menge ist keine Algebra, da $A \cup B \notin M$
 $\bar{A} \in M$)

Wahrscheinlichkeit (Kolmogorow)

Sei $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$ (Ereignisalgebra), $S \in \mathcal{A}$ sicheres Ereignis

Axiome der Wahrscheinlichkeit $P(A)$, $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$

• $P(A) \geq 0 \quad \forall A$

• $P(S) = 1$

• if $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (disjunkte Ereignisse)



Folgerungen: $P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(S) = 1$

$$\Rightarrow P(A) \leq 1$$

$$P(\emptyset) = 0, \text{ da } \underbrace{P(S)}_1 = P(\emptyset \cup S) = P(\emptyset) + \underbrace{P(S)}_1$$

intuitiv: relative Häufigkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{Wahrscheinl. für } A \text{ unter der Bed., dass } B \text{ eingetreten ist}$$

$P(A \cap B)$ heißt Verbundwahrsch. (joint probability)

A_1, A_2 heißen unkorreliert, falls

$$P(A_2|A_1) = P(A_2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)}$$

NB: Somit folgt auch $P(A_1|A_2) = P(A_1)$

Zufallsvariable

Zufallsvariable $X: \tilde{M} \rightarrow M$ ist gegeben durch
Ereignis Realisierung (z.B. Identität, $\tilde{M} \cong M$)

(i) Menge M von vollständig disjunkten Ereignissen X_i
(sample set)

(ii) Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(X_i)$ über M

Normierung $\sum_i P(X_i) = 1$ (wegen $\sum_i P(X_i) = P(\cup_i X_i) = P(S) = 1$)

Kontinuierliche Ereignismenge ($x \in \mathbb{R}$):

$P(x' \leq x \leq x'+dx') = p(x') dx'$ definiert

Wahrscheinlichkeitsdichte (Wahrscheinl. verteilung) $p(x)$

(Übergang zu diskreten Ereignissen: $p(x) = \sum_{i=1}^n \delta(x - x^{(i)}) P_i$)

Normierung $\int_a^b dx p(x) = 1$

Physikal. Interpretation: Realisierung der Wahrscheinl. verteilung

durch Ensemble von vielen äquivalenten Systemen, d.h.

durch Dichteverteilung $p(x) dx$ der Ensemblemitglieder
mit Werten $\in [x, x+dx]$.

Verallgemeinerung auf d Zufallsvar.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_d$

Normierung $\int dx p(x) = 1$

Mittelwert (Erwartungswert) einer Zufallsvar. x :

$\langle x \rangle := \int dx p(x) x$

Für Fkt. $\varphi(x)$:

$\langle \varphi \rangle = \int dx p(x) \varphi(x)$

d.h. lineares Funktional $f: L \rightarrow \mathbb{R}$ L geeignetes Fkt.raum
 $\varphi \mapsto \langle \varphi \rangle$

Unkorrelierte Zufallsvar.

x_1, x_2 heißen unkorreliert, falls $\rho(x_1, x_2) = \rho_1(x_1) \rho_2(x_2)$

Dann gilt $\langle x_1 x_2 \rangle = \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle$

Beweis: $\int dx_1 dx_2 \rho(x_1, x_2) x_1 x_2 = \underbrace{\int dx_1 \rho_1(x_1) x_1}_{\langle x_1 \rangle} \underbrace{\int dx_2 \rho_2(x_2) x_2}_{\langle x_2 \rangle}$ \square

Zus.hang zwischen Wahrsch. verteilung u. Mittelwert

ν -tes Moment der Wahrsch. verteil. $M_\nu := \langle x^\nu \rangle$

Momentengenerende $Z(\alpha) = \langle e^{\alpha x} \rangle = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha^\nu}{\nu!} M_\nu$
(charakterist. Fkt.)

$$\left. \frac{\partial^\nu}{\partial \alpha^\nu} Z(\alpha) \right|_{\alpha=0} = M_\nu$$