# Momente einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

$\nu$-tes Moment $M_\nu := \langle x^\nu \rangle$

Momentenerzeugende $Z(\alpha) = \langle e^{\alpha x} \rangle = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha^\nu}{\nu!} M_\nu$

Kenntnis aller Momente ist äquivalent zur Wahrsch.verteilung

$\alpha \equiv is$ : Fourier-Inverse von $Z(is) = \int dx\, \rho(x) e^{isx}$

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \int ds\, Z(is) e^{-ixs}$$

Verallg. auf $d$ Zufallsvar. :

$M_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_d} = \langle x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_d^{\nu_d} \rangle$ Momente der Ordnung $\nu := \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_d$

Momentenerzeugende $Z(\underline{\alpha}) = \langle e^{\underline{\alpha}\underline{x}} \rangle = \sum_{\nu_1 \dots \nu_d} \frac{\alpha_1^{\nu_1} \dots \alpha_d^{\nu_d}}{\nu_1! \dots \nu_d!} M_{\nu_1 \dots \nu_d}$

$\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$

$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$

**Kumulante** $C_{\nu_1 \dots \nu_d} = \langle x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_d^{\nu_d} \rangle_c$

ist definiert durch die

**Kumulantenerzeugende** $\Gamma(\underline{\alpha}) = \ln \langle e^{\underline{\alpha}\underline{x}} \rangle = \sum_{\nu_1 \dots \nu_d} \frac{\alpha_1^{\nu_1} \dots \alpha_d^{\nu_d}}{\nu_1! \dots \nu_d!} C_{\nu_1 \dots \nu_d}$

**Eigenschaft** :

Kumulanten sind **additiv** für **unkorrelierte** Zufallsvar.

(gilt nicht für Momente !!)

**Beweis:** Seien $X_1, X_2$ unkorreliert $\quad \underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\ \underline{x} = (x_1, x_2)$

$$\Rightarrow Z(\underline{\alpha}) = \langle e^{\underline{\alpha}\,\underline{x}}\rangle = \int dx_1\, dx_2\, \rho(x_1)\rho(x_2)\, e^{\alpha_1 x_1} e^{\alpha_2 x_2}$$
$$= \langle e^{\alpha_1 x_1}\rangle \langle e^{\alpha_2 x_2}\rangle$$

$$\Rightarrow \Gamma(\underline{\alpha}) = \ln Z(\underline{\alpha}) = \ln\langle e^{\alpha_1 x_1}\rangle + \ln\langle e^{\alpha_2 x_2}\rangle \overset{!}{=} \Gamma(\alpha_1) + \Gamma(\alpha_2)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha : \Gamma(\alpha,\alpha) = \ln\langle e^{\alpha \underbrace{(x_1+x_2)}_{x}}\rangle = \sum_\nu \frac{\alpha^\nu}{\nu!}\langle (x_1+x_2)^\nu\rangle_c$$
$$\overset{!}{=} \sum_\nu \frac{\alpha^\nu}{\nu!}\langle x_1^\nu\rangle_c + \sum_\nu \frac{\alpha^\nu}{\nu!}\langle x_2^\nu\rangle_c$$

$$\Rightarrow \langle (x_1+x_2)^\nu\rangle_c = \langle x_1^\nu\rangle_c + \langle x_2^\nu\rangle_c$$

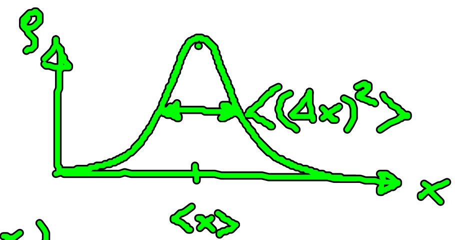
□

**Fluktuation** $\quad \Delta x := x - \langle x\rangle$

Es gilt $\quad \langle \Delta x\rangle = 0$

**Varianz:** $\langle (\Delta x)^2\rangle = \langle (x - \langle x\rangle)^2\rangle = \langle x^2\rangle - 2\langle x\rangle\langle x\rangle + \langle x\rangle^2$
$$= \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$$

Maß für die Breite einer Verteilung




**Korrelationsmatrix** (Kovarianzmatrix)

$$\langle \Delta x_k\, \Delta x_l\rangle = \langle x_k x_l\rangle - \langle x_k\rangle\langle x_l\rangle$$

Nichtdiagonalelemente verschwinden für unkorr. Zufallsvar.!

Zusammenhang zwischen Kumulanten u. Momenten:

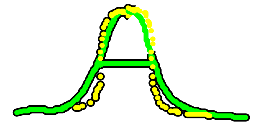
$\langle x\rangle_c = \langle x\rangle \quad$ mean

$\langle x^2\rangle_c = \langle (\Delta x)^2\rangle \quad$ variance (Breite)

$\langle x^3\rangle_c = \langle(\Delta x)^3\rangle$ skewness (Maß für Asymmetrie)

$\langle x^4\rangle_c = \langle(\Delta x)^4\rangle - 3\left(\langle(\Delta x)^2\rangle\right)^2$ kurtosis

$\vdots$



**Zentraler Grenzwertsatz:**

Seien $X_1, \dots, X_n$ unkorrelierte Zufallsvar. mit $\langle X_i\rangle = 0$, $\langle(\Delta X_i)^2\rangle = b_i^2$

Dann konvergiert die Verteilung für $n \to \infty$ gegen

**Gaußverteilung** $\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2\sigma^2}\right)$

(Normalverteilung)

$\sigma^2 = \langle x^2\rangle_c$, $\langle x^k\rangle_c = 0$ für $k > 2$

## 1.2 Markov-Prozesse

**Stochastischer Prozess:**

Zeitentwicklung einer Zufallsvar. $X(t)$

zeitabhängige Verbundwahrscheinl. $p(x_1,t_1; x_2,t_2; x_3,t_3; \dots)$

mit Realisierungen $x_1, x_2, x_3, \dots$ von $X(t)$

**bedingte Wahrscheinlichkeit**

$$p(x_1,t_1 \mid x_2,t_2; x_3,t_3; \dots) = \frac{p(x_1,t_1; x_2,t_2; \dots)}{p(x_2,t_2; x_3,t_3; \dots)}$$

$(t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \dots)$

**Markov-Prozess:**

$$p(x_1,t_1 \mid x_2,t_2; x_3,t_3; \dots) = p(x_1,t_1 \mid x_2,t_2)$$

nicht die ganze Vergangenheit $(t_2, t_3, t_4, \dots)$ bestimmt die Zukunft $(t_1)$, sondern nur die Gegenwart $(t_2)$

$\longrightarrow$ stochast. Prozess „ohne Gedächtnis"

also: $p(x_1,t_1; x_2,t_2; x_3,t_3; \dots) = p(x_1,t_1 \mid x_2,t_2)\, p(x_2,t_2; x_3,t_3; \dots)$

$= p(x_1,t_1 \mid x_2,t_2)\, p(x_2,t_2 \mid x_3,t_3)\, p(x_3,t_3; \dots)$

$$= p(x_1,t_1|x_2,t_2)\,p(x_2,t_2|x_3,t_3)\,\cdots\cdots\,p(x_{n-1},t_{n-1}|x_n,t_n)\,p(x_n,t_n)$$

$$t_1 \Leftarrow t_2 \Leftarrow t_3 \Leftarrow \cdots \Leftarrow t_{n-1} \Leftarrow t_n$$

( Markov - Kette )

Für Verbundwahrscheinl. unkorrelierter Ereignisse gilt:

$$\sum_B P(A \cap B \cap C) = \underbrace{\sum_B P(B)}_{1}\, P(A \cap C) = P(A \cap C)$$

Also gilt immer (auch nicht-Markov):

$$p(x_1,t_1) = \int dx_2\, p(x_1,t_1\,;\,x_2,t_2)$$

(Def. bed. W.)

$$= \int dx_2\, p(x_1,t_1|x_2,t_2)\,p(x_2,t_2)$$

kurz: $p(1) = \int dx_2\, p(1|2)\,p(2)$ (1)

$$p(1|3) = \int dx_2\, p(1;2|3)$$

$$= \int dx_2 \frac{p(1;2;3)}{p(3)} = \int dx_2 \frac{p(1;2;3)}{p(2;3)} \frac{p(2;3)}{p(3)}$$

$$= \int dx_2\, p(1|2;3)\,p(2|3) \qquad (2)$$

Markov-Annahme: $p(1|2;3) = p(1|2)$

$$\Rightarrow p(1|3) = \int dx_2\, p(1|2)\,p(2|3) \qquad (3)$$

$$\boxed{p(x_1,t_1|x_3,t_3) = \int dx_2\, p(x_1,t_1|x_2,t_2)\,p(x_2,t_2|x_3,t_3)}$$

<u>Chapman-Kolmogorov-Gleichung</u>

(Funktionalgl. für bedingte Wahrscheinl.)

diskrete Ereignisse:

$$\mathbb{P}(n_1,t_1|n_3,t_3) = \sum_{n_2} \mathbb{P}(n_1,t_1|n_2,t_2)\,\mathbb{P}(n_2,t_2|n_3,t_3)$$

## Stationärer stoch. Prozess:

$$p(x_1,t_1;x_2,t_2;x_3,t_3;\dots) = p(x_1,t_1+\varepsilon;x_2,t_2+\varepsilon;x_3,t_3+\varepsilon;\dots)$$

(Zeittranslationsinvarianz)

$\Rightarrow$ $p(x,t) = p(x)$ zeitunabh. ($\Rightarrow \langle x\rangle$ zeitunabh.)

$p(x_1,t_1;x_2,t_2) = p(x_1,t_1-t_2;x_2,0)$ $\Big(\Rightarrow \langle x(t)x(t+\tau)\rangle = G(\tau) = G(-\tau)\Big)$

$p(x_1,t_1|x_2,t_2) = p(x_1,t_1-t_2|x_2,0)$

(notw.+ hinr. für stationären Markov-Prozess)

## Ergodizität

Für stationäre Prozesse: Ensemble-Mittel $\stackrel{!}{=}$ Zeitmittel

Zeitmittel $\overline{X}(T) := \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt\, x(t)$, $T\to\infty$

$$\langle \overline{X}(T)\rangle = \langle x\rangle$$

$\Rightarrow$ Berechnung der Autokorrelationsfkt durch Zeitmittel:

$$G(\tau) := \langle x(t)x(t+\tau)\rangle \stackrel{!}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt\, x(t)x(t+\tau)$$

Zusammenhang mit spektralen Eigenschaften:

Fourier-Trafo $\hat{x}(\omega;T) := \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} dt\, e^{i\omega t} x(t)$

Es gilt $G(\tau) = G(-\tau)$

Spektrale Leistungsdichte (power spectral density)

$$S(\omega) := \lim_{T\to\infty} \frac{\pi}{T} \left| \hat{x}(\omega, T) \right|^2$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{\pi}{T} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-T}^{T} dt \int_{-T}^{T} dt' \, e^{i\omega \overbrace{(t-t')}^{-\tau}} \, x(t)\, x(t')$$

$t' = t+\tau$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int d\tau \, e^{-i\omega\tau} \underbrace{\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt \, x(t)\, x(t+\tau)}_{G(\tau)}$$

$$\boxed{S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \, e^{-i\omega\tau} \, G(\tau)}$$

<u>Wiener-Khinchin-Theorem</u>

Umkehrung:

$$G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, e^{i\omega\tau} \, S(\omega)$$

<u>homogener</u> stoch. Prozess:

$$\lim_{t\to\infty} p(x,t \,|\, x',0) = p(x)$$

(stat. Prozess wird von jeder Anfangsbed. erreicht)