2.2 Fokker-Planck-Gleichung

Zeitentwicklung eines kontinuierlichen Markov-Prozesses:
$X(t)$ (1-dim. Zufallsvar.)

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} p(x,t\,|\,x_0,t_0) = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x}\left[A(x,t)\,p(x,t\,|\,x_0,t_0)\right]}_{\text{Drift}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[B(x,t)\,p(x,t\,|\,x_0,t_0)\right]}_{\text{Diff.}}}$$

Anfangsbed.: $p(x,t_0\,|\,x_0,t_0) = \delta(x-x_0)$

$\hat{=}$ Ein-Zeit-Wahrsch. $p(x,t) = \int dx_0\, p(x,t;x_0,t_0) = \int dx_0\, p(x,t|x_0,t_0)\,p(x_0,t_0)$
mit Anf.bed. $p(x,t_0)$ (weniger singulär)

Randbed. (n-dim.)

Fokker-Planck (FP)-Gl. ist lokale Bilanzgl.

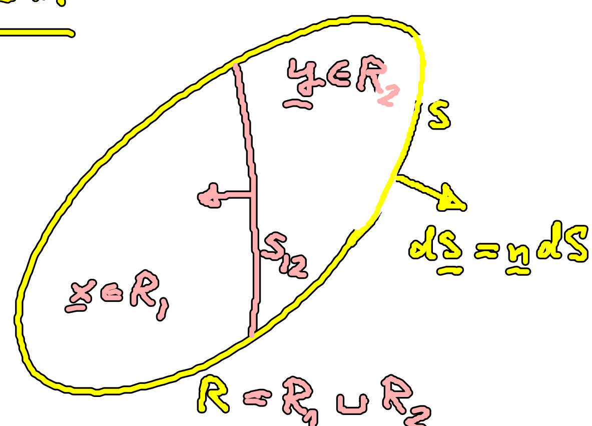
$$\frac{\partial p(\underline{x},t)}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} J_i(\underline{x},t) \qquad (\dot{p} + \operatorname{div} \underline{J} = 0)$$

mit Wahrscheinl.strom

$$J_i(\underline{x},t) = A_i(\underline{x},t)\,p(\underline{x},t) - \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(B_{ij}(\underline{x},t)\,p(\underline{x},t)\right)$$

(vgl. Teilchendichte
$\dot{\varrho} + \operatorname{div} \underline{J} = 0$
$\underline{J} = \underline{v}\varrho - D\nabla\varrho$
$\Rightarrow \dot{\varrho} = -\varrho\nabla\underline{v} + D\Delta\varrho$)

Globale Bilanzgl. für Gebiet $R \in \mathbb{R}^n$



$$P(R,t) := \int_R d^n x\; p(\underline{x},t)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\int_S d\underline{S} \cdot \underline{J}(\underline{x},t) \qquad \left(\text{gauß'scher Satz}\right)$$

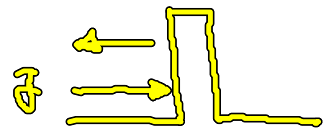
Netto-Wahrsch.fluss durch beliebige Fläche S_{12}:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{R_1} d^n x \int_{R_2} d^n y \left[p(\underline{x}, t+\Delta t; \underline{y}, t) - p(\underline{y}, t+\Delta t; \underline{x}, t) \right] = \int_{S_{12}} d\underline{S} \cdot \underline{J}(\underline{x}, t)$$

$$R_1 \leftarrow R_2$$

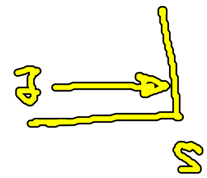
(a) Reflektierende Barriere:

$$\underline{n} \cdot \underline{J}(\underline{x}, t) \Big|_{\underline{x} \in S} = 0$$

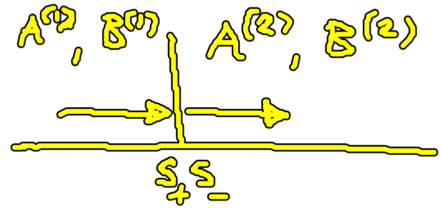


(b) Absorbierende Barriere:

$$p(\underline{x}, t) \Big|_{\underline{x} \in S} = 0$$



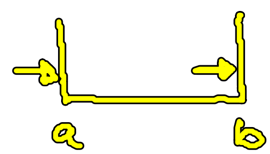
(c) Grenzfläche zwischen 2 Medien:



$$\underline{n} \cdot \underline{J} \Big|_{S_+} = \underline{n} \cdot \underline{J} \Big|_{S_-}$$

$$p \Big|_{S_+} = p \Big|_{S_-}$$

(d) Periodische Randbed.:



$$p(a,t) = p(b,t)$$
$$J(a,t) = J(b,t)$$

(e) Natürliche Randbed.: $A(a,t) = 0$

(Geschw. $= 0$, Rand wird nie erreicht)

Stationäre Lösung für homogenen Markov-Prozess

homogen $\Rightarrow$ A, B unabh. von t

1-dim.: $\frac{d}{dx} J(x,t) = 0 \Rightarrow J(x) = \text{const.} = J(a) = J(b)$

(i) reflekt. Randbed. $\Rightarrow J(x) = 0$

$$\Rightarrow A(x)p^*(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}[B(x)p^*(x)] = 0 \quad \Rightarrow 2\frac{A}{B}dx = \frac{d(Bp^*)}{Bp^*}$$

$$\Rightarrow \boxed{p^*(x) = \frac{N}{B(x)} \exp\left[2\int_a^x dx' \frac{A(x')}{B(x')}\right]}$$

Potenziallösung, Normierung $\int_a^b dx\, p^*(x) = 1 \Rightarrow N$

(ii) <u>period. Randbed.</u> $\Rightarrow J(x) = J$

$$A(x)p^*(x) - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}[B(x)p^*(x)] = J \quad (1) \quad \text{lin. inhom. Dgl.}$$

Mit $\psi(x) := \exp\left[2\int_a^x dx' \frac{A(x')}{B(x')}\right]$ ergibt sich

$$A\frac{\psi}{B} - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\psi = 0 \qquad (\text{homog. Lös } p^* = \frac{\psi}{B})$$

$$\Rightarrow A = \frac{B}{2}\frac{\psi'}{\psi} \overset{\text{in }(1)}{\Longrightarrow} Bp^*\frac{\psi'}{\psi} - (Bp^*)' = 2J$$

$$\Rightarrow \frac{-(Bp^*)\psi' + (Bp^*)'\psi}{\psi^2} = -\frac{2J}{\psi}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{Bp^*}{\psi}\right)' = -\frac{2J}{\psi}$$

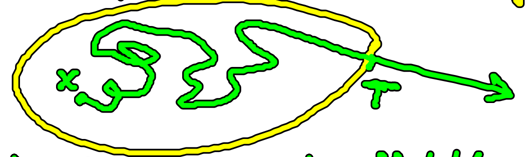
$$\int_a^x dx' \;\Rightarrow\; \left.\frac{Bp^*}{\psi}\right|_a^x = -2J\int_a^x \frac{dx'}{\psi(x')} \Rightarrow p^*(x)$$

Bestimmung von J durch period. Randbed.

$$\Rightarrow p^*(x) = p^*(a)\,\frac{\int_a^x \frac{dx'}{\psi(x')}\frac{B(b)}{\psi(b)} + \int_x^b \frac{dx'}{\psi(x')}\frac{B(a)}{\psi(a)}}{\frac{B(x)}{\psi(x)}\int_a^b \frac{dx'}{\psi(x')}}$$

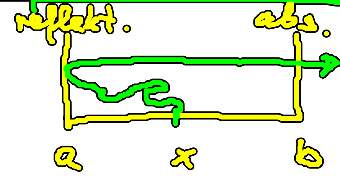
<u>First passage time</u>

Fragestellung: Wie lange hält sich ein Teilchen in einem vorgegebenen Gebiet auf?



Teilchen zwischen 1 absorb. u. 1 reflektierenden Barriere

Ziel: Entweichzeit T (escape time)



Wahrsch., dass das Teilchen zur Zeit t noch in (a,b), wenn es bei x gestartet ist:

$$G(x,t) := \int_a^b dx'\, p(x',t\,|\,x,0) \equiv \mathrm{Prob}(T \geq t)$$

stationärer Prozess: $p(x',t\,|\,x,0) = p(x',0\,|\,x,-t)$

Rückwärts-FP-gl.: Rückwärtsentw. für $t'<t$ aus (x,t)

$$\frac{\partial p(x,t\,|\,y,t')}{\partial t'} = -A(y,t')\frac{\partial p(x,t\,|\,y,t')}{\partial y} - \frac{1}{2}B(y,t')\frac{\partial^2 p(x,t\,|\,y,t')}{\partial y^2}$$

homog. (A, B zeitunabh.): $\displaystyle \frac{\partial}{\partial t}G(x,t) = -\frac{\partial}{\partial t'}\int_a^b dx'\, p(x',0\,|\,x,\underbrace{t'}_{=-t})$

$$\frac{\partial}{\partial t}G(x,t) = A(x)\frac{\partial}{\partial x}G(x,t) + \frac{1}{2}B(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x,t)$$

„End" bed.: $p(x',0\,|\,x,0) = \delta(x-x')$

$$\Rightarrow \quad G(x,0) = \begin{cases} 1 & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

absorb. Randbed.: $\mathrm{Prob}(T \geq t) = 0$ wenn $x=a$ oder b

$$\Leftrightarrow \quad G(a,t) = G(b,t) = 0$$

mittlere erste Übergangszeit (mean first passage time)

$$T(x) := \langle T \rangle = -\int_0^\infty t\, dG = -\int_0^\infty dt\, t\frac{\partial}{\partial t}G(x,t) \overset{\text{part.}}{\underset{\text{Int.}}{=}} \int_0^\infty dt\, G(x,t)$$

Dgl. für T(x) aus der Rückwärts-FP-Gl.:

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} G(x,t)\,dt = \underbrace{G(x,\infty)}_{0} - \underbrace{G(x,0)}_{1} = -1$$

** $$A(x)\frac{\partial}{\partial x}T(x) + \frac{1}{2} B(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x) = -1 \quad , \quad \text{Randbed. } T(a)=T(b)=0$$

Lösung der hom. Gl. $A\psi - \frac{1}{2}B\frac{\partial}{\partial x}\psi = 0 \Leftrightarrow 2\frac{A}{B}dx = \frac{d\psi}{\psi}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\psi(x) = \exp\left[2\int_a^x dx' \frac{A(x')}{B(x')}\right]}$$

⇒ Lösung der inhom. Gl. T(x) durch ψ(x) ausgedrückt:

$$\boxed{T(x) = 2\int_x^b \frac{dy}{\psi(y)} \int_a^y dz\, \frac{\psi(z)}{B(z)}} \qquad (*)$$

__Beweis__: $T' = -\frac{2}{\psi(x)}\int_a^x dz\, \frac{\psi(z)}{B(z)}$

$$T'' = -\frac{2}{\psi(x)^2}\left[\frac{\psi(x)^2}{B(x)} - \psi'(x)\int_a^x dz\, \frac{\psi(z)}{B(z)}\right]$$

$$\psi' = \frac{2A}{B}\psi \Rightarrow \frac{2A}{\psi}$$

(**)

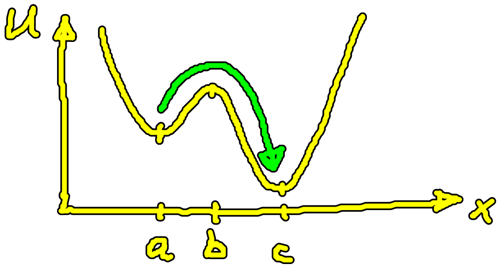
$$\Rightarrow AT' + \frac{1}{2}BT'' = \underbrace{-\frac{2A}{\psi}\int dz\, \frac{\psi}{B}} - \left[1 - \underbrace{\frac{B}{\psi^2}\psi'\int dz\, \frac{\psi}{B}}\right] \overset{!}{=} -1$$

Randbed.: $T'(a) = \int_0^\infty dt\, \frac{\partial}{\partial x}G(x,t)\Big|_{x=a} = 0$ ✓

$T(b) = 0$ ✓

□

Anwendung: Kramers' Problem (1940)



Entweichen über Potenzialbarriere:

bistab. Pot. $U(x)$

überdämpftes Teilchen: $\dot{x} = \underbrace{-U'(x)}_{\text{Kraft}} \equiv A(x)$

Diff.konst. $D = \frac{B}{2}$

FP-Gl. $$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} p(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[U'(x)\, p(x,t)\right] + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x,t)}$$

stat. Lös. $$p^*(x) = \mathcal{N} \exp\left[-\int_a^x dx' \frac{U'(x')}{D}\right] = \tilde{\mathcal{N}} \exp\left[-\frac{U(x)}{D}\right]$$

(reflekt. Randbed.)