

## 3.2 Kohärenzresonanz

Jetzt: autonome Systeme, ohne externe periodische treibende Kraft

Annahme: determinist. System hat stabilen Fixpt.,

⇒ Rauschen kann Oszillationen induzieren  
(self-sustained oscillations, stoch. limit cycle)  
(LC)

Reviews: Lindner, Garcia-Ojalvo, Neiman, Schimansky-Geier:  
Effects of noise in excitable systems, Phys. Rep. 392, 321 (2004)

Janson, Balonov, Schöll: Control of noise-induced dyn.  
in: Handbook of Chaos Control (Wiley, 2008)

häufig unterhalb einer Bif. eines determ. Grenzzyklus  
(Hopf-Bifurk., globale Bifurkation (SNIPER = SNIC))

1. Beispiel: Van der Pol - Oszillator (1920: nichtlin. el. Stromkreis)

- System knapp unterhalb einer Hopf-Bifurkation

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = (\varepsilon - x^2)y - \omega_0^2 x + D\xi(t) \end{cases}$$

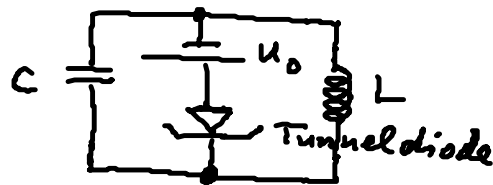
$$\Leftrightarrow \ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = D\xi(t)$$

nichtlin. Reibung

D=0 (determ.): Fixp.  $x^* = y^* = 0$

Stab. der Fixp. (linearisiert)  $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A = 0, \operatorname{tr} A = \varepsilon, \det A = \omega_0^2 > 0$$



NB: Rauschintens. D statt  $\sqrt{2D}$



$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \epsilon = 0 \quad \text{Hopf-Bif. } (\lambda = \pm i\omega_0) \\ \epsilon < 0 \quad \text{stabiler Fokus} \\ \epsilon > 0 \quad \text{instab. Fokus + LC} \end{array} \right\} \lambda = \frac{\epsilon}{2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}$$

Wähle z.B.  $\epsilon = -0.01$ ,  $\omega_0 = 1$   
 $\Rightarrow$  rauschinduz. Osz. ( $D \neq 0$ )



Fig. 1 - Simulated phase portraits of noise-induced oscillations of the Van der Pol system for  $\epsilon = -0.01$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $\tau = 0$ ,  $K = 0$ : a)  $D = 0.003$ ; b)  $D = 0.5$ . Integration time: 300 time units.

Pomplun, et al.  
Europhys. Lett. 71, 366 (2005)

## 2. Beispiel: FitzHugh-Nagumo-Modell (Bonhoeffer-van-der-Pol)

- anregbares System (Typ II): Schwellenverhalten (stabiler Fixp.)

Anwendung: Spiking von Neuronen

$$\begin{cases} \epsilon \dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y \\ \dot{y} = x + a + D\xi(t) \end{cases}$$

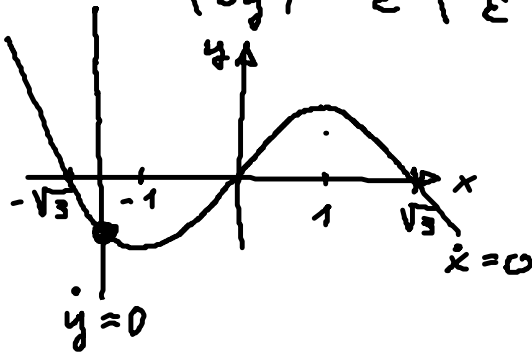
Aktuator (schnell)

Inhibitor (langsam)

Zeitskalenverh.  $\epsilon \ll 1$

$D = 0$ : Fixp.  $x = -a$ ,  $y = -a + \frac{a^3}{3}$  Anreg.schwelle  $a$

Stab.  $\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} 1-a^2 & -1 \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}$ ,  $\text{tr} A = 1-a^2$ ,  $\det A = \epsilon > 0$



$a = 1$ : Hopf-Bif.

$a < 1$ : instab. Fixp. + LC (oszillator. Regime)

$a > 1$ : stabiler Knoten (anregbares Regime)

(z.B.  $a = 1.1$ ,  $\epsilon = 0.01$ )

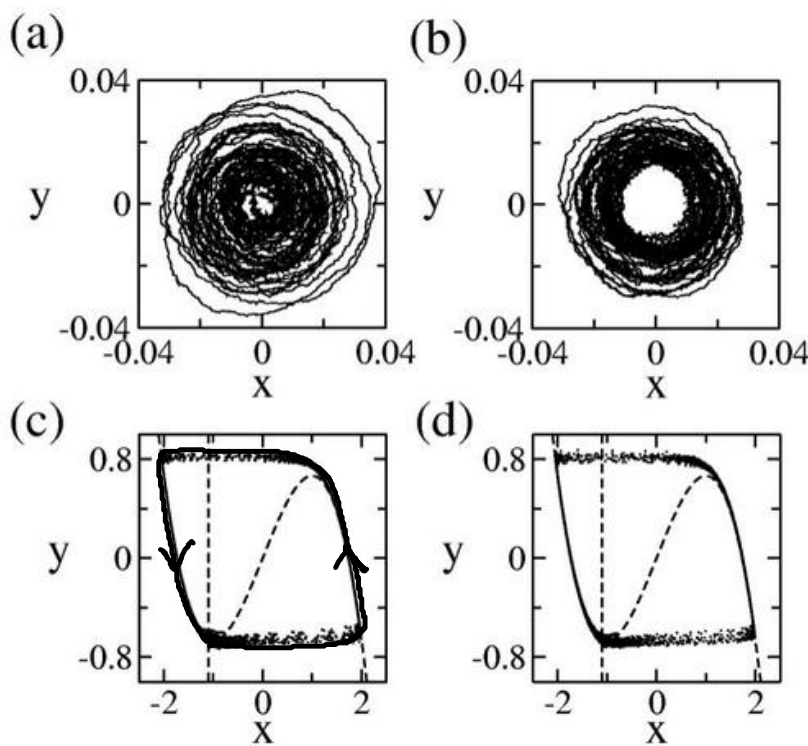
slow-fast-System

$D \neq 0$ : rauschinduz. Osz.

Janson, Balanov, Schöll: PRL 93, 010601 (2004)

Balanov, Janson, Schöll: Physica D 199, 1 (2004)

Schöll, Balanov, Janson: Stoch. Dyn. 5, 281 (2005)



Janson (2004)

Van-der-Pol

FitzHugh-Nagumo

FIG. 1. Phase portraits of noise-induced motion: (a),(b) Van der Pol oscillator at  $D = 0.003$ ; (c),(d) FitzHugh-Nagumo system at  $D = 0.09$  (the dashed lines denote the null isoclines), (a),(c)  $K = 0$ ; (b),(d)  $K = 0.2$ ,  $\tau = T_0$ .

## Kohärenzresonanz

Gang, Ditinger, Ning, Haken: Stoch. resonance without exten. periodic forcing, PRL 71, 807 (1993)

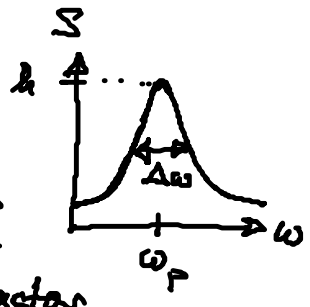
Pikovsky, Kurths: Coherence resonance in a noise-driven excitable system, PRL 78, 775 (1997)

Neiman, Sapsis, Stone: PRE 56, 270 (1997)

- konstruktiver Einfluss von Rauschen

- Regularität („Kohärenz“) der rauschinduz. Osz. am größten für endl. Rauschintens.  $D_{opt}$
- Maß für Regularität:

- Signal-Rausch-Verhältnis (SNR)  $\beta = \frac{h}{\Delta\omega/\omega_p}$   
 (Haken)  
 quality factor



- Standardabweich. der ISI  $T_{ISI}$   
 (interspike interval)

$$R_T = \frac{\sqrt{\langle T_{ISI}^2 \rangle - \langle T_{ISI} \rangle^2}}{\langle T_{ISI} \rangle}$$

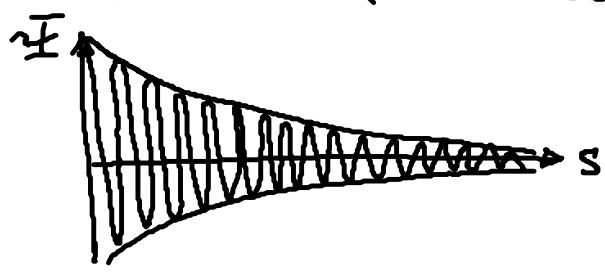
(normierte ISI-Flukt.)

- Korrelationszeit  $t_{cor} := \frac{1}{\bar{\Psi}(0)} \int_0^\infty |\bar{\Psi}(s)| ds$   
 (Autokor.fkt.  $\bar{\Psi}(s) = \langle [x(t+s) - \langle x \rangle][x(t) - \langle x \rangle] \rangle$ )  
 Varianz  $\bar{\Psi}(0) = \sigma^2$

Motivation der Def.:

für lin. stoch. Prozess  $\dot{x} = -(k + i\omega_0)x + \xi(t)$ :

$$\bar{\Psi}(s) = \bar{\Psi}(0) e^{-ks} \cos \omega_0 s \quad \left( \begin{array}{l} \text{§ 2.3: stat. Ornstein-Ull.} \\ \text{Re } e^{-(k+i\omega_0)s} \end{array} \right)$$



exp. abklingende Enveloppe  
 Trägerfrequenz  $\omega_0$   
 $k > 0$  (stabiler Fixp.)

Zusammenhang zwischen  $t_{cor}$  und  $k$ :

$$t_{cor} = \int_0^\infty e^{-ks} |\cos \omega_0 s| ds$$

Approx.  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi d\phi = \frac{2}{\pi}$  für  $k \ll \omega_0$  (Füllfaktor)

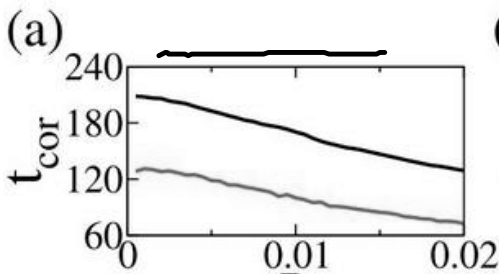
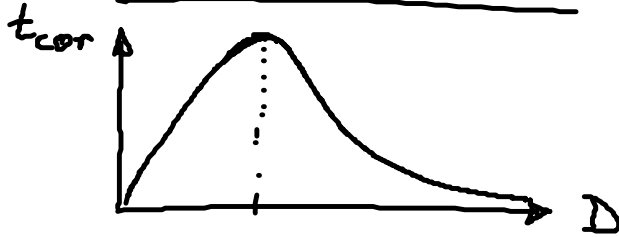
$$\Rightarrow t_{cor} \approx \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-ks} ds = \frac{2}{\pi k}$$

also  $\bar{\Psi}(s) = \bar{\Psi}(0) e^{-\frac{2}{\pi} \frac{s}{t_{cor}}} \cos \omega_0 s$

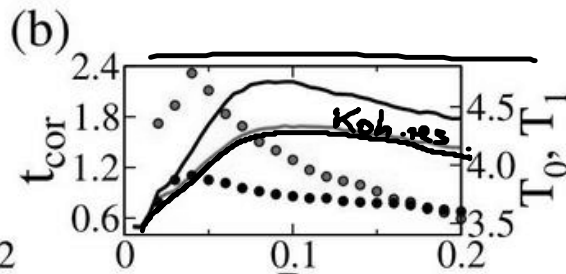
$$k = \left| \operatorname{Re}(\text{Eigenwert des Fixp.}) \right| = \text{Bifurk. par.} \\ \operatorname{Re} \lambda < 0 \quad (\text{Abstand von Hopf-Bif.})$$

⇒ je stabiler der Fixp., umso kürzer die Corr.zeit  
(je weiter weg von der Hopf-Bif.)

### Kohärenzresonanz



keine Kohärenzresonanz.



Kohärenzres.

FIG. 2 (color online). Correlation time  $t_{\text{cor}}$  vs noise intensity  $D$  for (a) the Van der Pol oscillator and (b) the FitzHugh-Nagumo system. Grey (green online) lines:  $K = 0$ ; black lines:  $K = 0.2$ ,  $\tau = T_0$ . (b) Grey (green online) circles:  $T_0$  for  $K = 0$ ; black circles:  $T_1$  for  $K = 0.2$ ,  $\tau = T_0$ .

Zusammenspiel zweier Zeitskalen (FHN-Modell):

- Aktivierungszeit (Fixp. → Schwelle): Irregularität nimmt ab mit  $D$
- Spike-Dauer + Erholungszeit (determ.): Irregularität nimmt zu mit  $D$

NB: Van der Pol-Osz. zeigt keine Kohärenzresonanz



$t_{\text{cor}}$  monoton abnehmend

(kein Schwellenverhalten,  
nur lokale Eigenschaft  
des Fixp.)