4.4. Licht-Materie Wechselwirkung

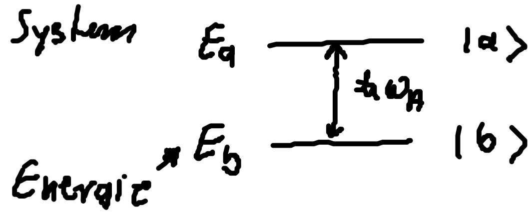
- in vielen Fällen reicht semiklassische Theorie
  (E-Feld klassisch
  Materie / Atom quantisiert)
- aber z.B. Phänomene wie
  - spontane Emission ←
  - Quantum beats
  - Lasing ohne Inversion

  nur voll quantenmechanisch zu erklären

4.4.1. Wechselwirkung von einem Atom mit Feldmoden

(Jaynes-Cummings-Hamiltonian)

Atom als 2 Niveau System



Hamiltonoperator
$\hat{\mathcal{H}}_A$

- Feld durch Hamiltonoperator $\hat{\mathcal{H}}_F$ beschrieben

$$\hat{\mathcal{H}}_F = \sum_k \hbar\omega_k \left(a_k^+ a_k + \frac{1}{2} \right)$$

- Wechselwirkung in Dipol Näherung

$$\hat{\mathcal{H}}_W = -e\underline{\hat{r}}\,\underline{\hat{E}}$$

- Hamiltonoperator fürs Atom über Atomeigenzustände $\{|i\rangle\}$ formulieren

$$\hat{\mathcal{H}}_A = \sum_i E_i\,|i\rangle\langle i| = \sum_i E_i\,\hat{\sigma}_{ii}$$

$i = \{a, b\}$

mit Übergangsoperatoren $\hat{\sigma}_{ij}$

$$\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|$$

- Operator $\hat{r}$ bzgl. Atomzustände darstellbar

$$e\underline{\hat{r}} = \sum_{i,j} e|i\rangle \underbrace{\langle i|\,\underline{\hat{r}}\,|j\rangle}_{\mu_{ij}} \langle j|$$

μ_{ij} Dipolmatrixelement

- E-Feld Operator

Amplitude enthält r-Abhängigkeit aus Helmholtz Gl.

z.B. $\mathcal{E}_k = \hat{\mathcal{E}}_k e^{ikr}$

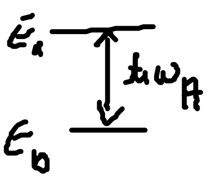
$$\hat{E}(r,t) = \sum_k \mathcal{E}_k(r)\vec{e}_k \left(a_k(t) + a_k^+(t) \right)$$

Definition Kopplungskonstante g_k^{ij}

$$\boxed{g_k^{ij} = \frac{-\mu_{ij}\hat{e}_k \mathcal{E}_k}{\hbar}}$$

Gesamt Hamiltonian $\hat{\mathcal{H}}$

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_k \hbar\omega a_k^+ a_k + \underbrace{E_a\hat{\sigma}_{aa} + E_b\hat{\sigma}_{bb}}_{= \frac{1}{2}\hbar\omega_A(\hat{\sigma}_{aa} - \hat{\sigma}_{bb}) + \frac{1}{2}(E_a + E_b)\underbrace{(\hat{\sigma}_{aa} + \hat{\sigma}_{bb})}_{\mathbb{1}}} + \hbar\sum_k g_k(\hat{\sigma}_{ab} + \hat{\sigma}_{ba})(a_k + a_k^+)$$



Bemerkung: · konstante Nullpunktsenergie wird weggelassen

· $\frac{1}{2}(E_a + E_b)$ weggelassen

Def.: $\hat{\sigma}_z = |a\rangle\langle a| - |b\rangle\langle b| = \hat{\sigma}_{aa} - \hat{\sigma}_{bb}$ → Mittelwert ergibt Inversion des Atoms

$\hat{\sigma}_+ = |a\rangle\langle b| = \hat{\sigma}_{ab}$ → „bringt Atom in oberen Zustand"

$\hat{\sigma}_+ |b\rangle = |a\rangle$

$\hat{\sigma}_- = |b\rangle\langle a| = \hat{\sigma}_{ba}$ → „Vernichter"

$$\hat{\mathcal{H}} = \underbrace{\sum_k \hbar\omega_k \hat{a}_k^+ \hat{a}_k + \frac{1}{2}\hbar\omega_A \hat{\sigma}_z}_{\mathcal{H}_0} + \underbrace{\hbar \sum_k g_k (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a}_k + \hat{a}_k^+)}_{\mathcal{H}_w}$$

<u>Bemerkung</u>: die Matrizen $\sigma_z, \sigma_+, \sigma_-$ gehorchen der Algebra der Pauli Matrizen

$$[\sigma_-, \sigma_+] = |b\rangle\langle a|a\rangle\langle b| - |a\rangle\langle b|b\rangle\langle a|$$
$$= -\sigma_z$$

$$[\sigma_-, \sigma_z] = |b\rangle\langle a|a\rangle\langle a| - |b\rangle\overbrace{\langle a|b\rangle}^{0}\langle b|$$
$$- \left(|a\rangle\langle a|b\rangle\langle a| - |b\rangle\langle b|b\rangle\langle a|\right)$$
$$= 2\sigma_-$$

$$\sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Der WW Term $\mathcal{H}_w$ besteht aus:

$$\underbrace{g_k \sigma_+ a_k} + \underbrace{g_k \sigma_+ a_k^+ + g_k \sigma_- a_k} + \underbrace{g_k \sigma_- a_k^+}$$

es gilt

$[\hat{\sigma}_+, \hat{a}_k] = 0$

Photon vernichtet
Atom angeregt

Photon erzeugt
Atom geht in
unteren Zustand

- nicht energieerhaltend
- sehr schnelle Prozesse verschwinden im Mittel

→ werden vernächlässigt

(RWA) Rotating Wave approximation

Vorstellung im Wechselwirkungsbild

$$V = e^{\frac{i\mathcal{H}_0 t}{\hbar}} \mathcal{H}_\omega e^{-\frac{i\mathcal{H}_0 t}{\hbar}}$$

- $$a_k^\omega = e^{i\omega a_k^+ a_k t} a_k e^{-i\omega a_k^+ a_k t}$$

$$= a_k e^{-i\omega_k t}$$

- $$\hat{\sigma}_+^\omega = e^{i\omega_A \sigma_z t/2} \sigma_+ e^{-i\omega_A \sigma_z t/2}$$

$$= \sigma_+ e^{i\omega_A t}$$

d.h. RWA vernächlässigt Terme mit $e^{i(\omega_k + \omega_A)t}$ (schnell)

Prozesse mit Differenzfrequenz bleiben

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\mathcal{H}} = \sum_k \hbar\omega_k a_k^+ a_k + \frac{1}{2}\hbar\omega_A \sigma_z + \hbar \sum_k g_k (\sigma_+ a_k + a_k^+ \sigma_-)}$$

Jaynes Cumming Hamiltonian

4.4.2. WW eines Atoms mit einmodigem Feld

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega \hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega_A \hat{\sigma}_z + \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{a}^+ \hat{\sigma}_-)$$

- Problem ist exakt lösbar
- Anfangsbedingung: angeregtes Atom

- Es gibt verschiedene Möglichkeiten das Problem zu lösen

(1) Heisenberg Bild

DGL für Operatoren aus $\dot{a} = \frac{1}{i\hbar}[a, \mathcal{H}]$

Vorteil: Direkter Zugang zu Inversion $D(t)$

$D(t) = \langle \sigma_z \rangle$

und Korrelationsfunktionen

z.B. Dipol-Dipol Korrelation

$\langle \sigma^+_{(t)} \sigma^-(t+\tau) \rangle$

z.B. Feld Korrelationsfunktionen

$G^{(2)} = \langle a^+(t) a^+(t+\tau) a(t) a(t+\tau) \rangle$

DGL's

freie Dynamik

Dynamik durch WW

$$\dot{a} = \frac{1}{i\hbar}[a, \mathcal{H}_0] + \frac{1}{i\hbar}[a, \mathcal{H}_W] = -i\omega a - i g \sigma_-$$

$$\dot{\sigma}_- = -i\omega_A \sigma_- + i g \sigma_z a$$

$$\dot{\sigma}_z = 2ig\left(a^+ \sigma_- - \sigma_+ a\right)$$

Lösung ergibt für Inversion $D(t) = \langle \sigma_z(t) \rangle$

$$D(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{nn}(0) \left[\frac{\Delta^2}{\Omega_n^2} + \frac{4g^2(n+1)}{\Omega_n^2} \cos(\Omega_n t) \right]$$

Anfangsbedingung für Photonenverteilung der Mode

$\Delta = \omega_A - \omega$

Ω_n: n-Photonen Rabi-Frequenz

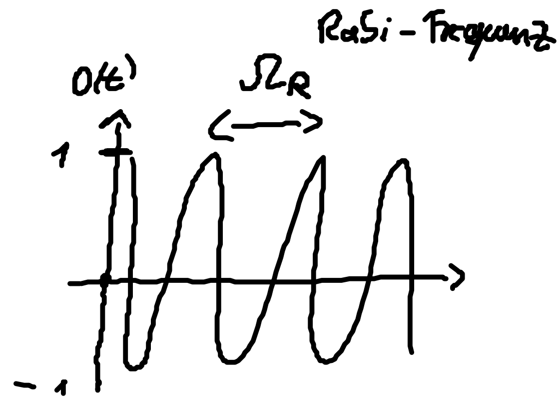
$\Omega_n^2 = \Delta^2 + 4g^2(n+1)$

Bsp. • WW mit Vakuum (eine Mode ohne Photonen)

$$\rho_{nn}(0) = \delta_{n0}$$

$\Delta = 0$ resonante Anregung

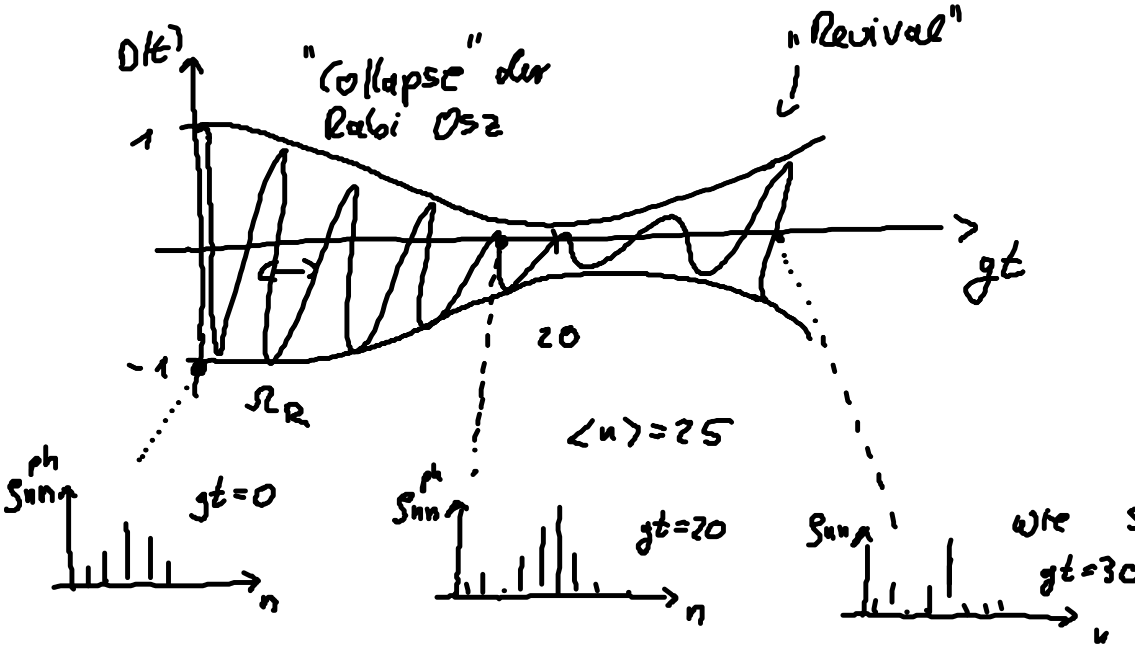
$$W(t) = \frac{1}{4g^2} 4g^2 \cos(2gt)$$



$$\left(2g = -\frac{2\mu E}{\hbar} \right)$$

- Inversion oszilliert auch ohne treibendes Feld im Unterschied zur semiklassischen Theorie

- WW mit kohärenten Zustand : $\varrho_{nn}(0) = \frac{\langle n\rangle^n e^{-\langle n\rangle}}{n!}$



wie sieht $\varrho_{nn}(t)$ aus?

② Dichtematrixformalismus im WW Bild

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_W$$

Lösung hat die Form $|\psi(t)\rangle = \sum_n \left\{ c_{a,n}(t)\,|a,n\rangle + c_{b,n}(t)\,|b,n\rangle \right\}$

langsam veränderliche Wahrscheinlichkeits Amplituden

Dichtematrix (reiner Zustand) $\hat{\varrho} = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$

2+

Wahrscheinlichkeit n Photonen zur Zeit t zu finden:

$$\varrho^{ph}_{nn} = |c_{a,n}|^2 + |c_{b,n}|^2 = \sum_{i=a,b} \varrho_{in\,in}$$

- reduzierte Dichtematrix $\hat{\rho}^{Ph} = tr_{Atom}\, \hat{\rho}$ $(n \times n)$

  -> liefert Dichtematrix des Feldes -> Photonstatistik

- " $\hat{\rho}^{A} = tr_{Feld}\, \hat{\rho}$

  -> liefert Dichtematrix des Atoms (2×2)

  -> Inversion

<u>Bem</u>

- Revivals treten nur auf solange diskrete Verteilung d. Photonen „spürbar"

  im Grenzfall $\rho_{nn}(0)$ Gauß-Verteilung ergibt exponentiellen Abfall

- Vakuum besteht nicht nur aus einer Mode

  -> Modell erweitern um Zerfall des Atomzustandes zu beschreiben