Ergebnis von 4.4.3.

Atom + therm. Reservoir ($\bar{n}_{th}$) mit Dichtematrixformalismus + RWA

$$\dot{\rho}_A = -\bar{n}_{th}\frac{W}{2}\left[\sigma_-\sigma_+\rho_A(t) - \sigma_+\rho_A(t)\sigma_-\right] - (\bar{n}_{th}+1)\frac{W}{2}\left[\sigma_+\sigma_-\rho_A(t) - \sigma_-\rho_A(t)\sigma_+\right] + c.c.$$

$$\bar{n}_{th} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_A}{k_B T}} - 1}$$

$$\dot{\rho}_{aa} = \langle\dot{\sigma}_{aa}\rangle = \mathrm{tr}\,\sigma_{aa}\dot{\rho}_A$$

$$= \underbrace{n_{th}W}_{W_{ba}}\langle\sigma_{bb}\rangle - \underbrace{(n_{th}+1)W}_{W_{ab}}\langle\sigma_{aa}\rangle$$

$$\langle\dot{\sigma}_{bb}\rangle = -n_{th}W\langle\sigma_{bb}\rangle + (n_{th}+1)W\langle\sigma_{aa}\rangle$$

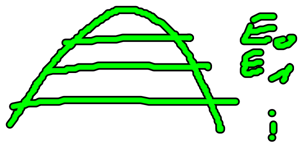
$$\langle\dot{\sigma}^-\rangle = -(2n_{th}+1)\frac{W}{2}\langle\sigma^-\rangle$$

- Ratengleichung für Besetzung der Atomzustände (Quanteneigenschaften des Lichts sind rausgemittelt)

- mit thermischem Reservoir gilt stets $\rho_{aa}^{ss} < \rho_{bb}^{ss}$

- auf dem Weg zum Laser bräuchte man Medium mit $\rho_{aa} > \rho_{bb}$

Trick: betrachte als Reservoir folgendes System:



$$E_n = -\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

als kanonisches Ensemble der Temperatur $-T$

$$\rho_n = \frac{e^{-n\hbar\omega/kT}}{1-e^{-\hbar\omega/kT}}$$

- für kleine T fast nur E_0 besetzt ~
  → entspricht invertiertem 2 Niveau System

Invertiertes Oszillator Bad mit neg. T.

$$\langle b_k^+, b_{k'}\rangle = (\bar{n}+1)\,\delta_{kk'} \qquad \bar{n} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}$$

$$\langle b_k, b_{k'}^+\rangle = \bar{n}\,\delta_{kk'}$$

Kopplung an solch ein Reservoir (Pump Reservoir) liefert invertiertes Atom als Lösung der Dichtematrixgleichung

$$W_{ab}^{neg} = W_{ba}$$
$$W_{ba}^{neg} = W_{ab}$$

4.4.4. Feldmode (z.B. a, a^+) in einer Kavität

- Dämpfung eines Osz. durch WW mit Reservoir

Methode: Quanten Operator Ansatz

→ Quanten Langevin Gleichung

Vorteil: Beschreibung der Dynamik der Operatoren

Direkte Beschreibung des Rauschens durch Rauschoperator

Hamiltonian: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{WW}$

$$= \overbrace{\hbar\omega a^+ a + \sum_k \hbar\omega_k b_k^+ b_k}^{} \underbrace{+ \hbar \sum_k g_k^F \left(b_k^+ a + a^+ b_k\right)}_{\mathcal{H}_{FR}}$$

WW Feld + Reservoir

Heisenberg'sche Bewegungsgleichungen

$$\text{(I)} \quad \dot{a} = \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, a] = \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}_0, a] + \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}_{FR}, a]$$

$$= -i\omega a + i \sum_k \underbrace{g_k^F}_{} b_k(t)$$

Kopplungskonstante Mode + Reservoir

(enthält opt. Dipolmatrixelement)

$$\text{(II)} \quad \dot{b}_k = -i\omega_k b_k(t) - i g_k^F a(t)$$

Ziel: geschlossene Gleichung für $a(t)$

→ Integrieren von (II) $\quad b_k(t) = b_k(0) e^{-i\omega_k t} - i g_k^F \int_0^t dt' a(t') e^{-i\omega_k(t-t')}$

+ einsetzen in (I)

$$\Rightarrow \dot{a} = -i\omega a - \sum_k (g_k^F)^2 \int_0^t dt'\, a(t')\, e^{-i\omega_k (t-t')} + \hat{f}_a(t)$$

$$\hat{f}_a(t) = -i \sum_k g_k^F\, b_k(0)\, e^{-i\omega_k t}$$

Operator hängt nur vom Reservoir zur Zeit $t=0$ ab
→ Rauschterm

$\boxed{\text{Def.:}}$ $\tilde{a}(t) = a(t)\, e^{i\omega t}$

langsame Amplitude

Slowly Varying Amplitude Approx. $\boxed{\text{(SVA)}}$

es gilt weiter $[\tilde{a}(t), \tilde{a}^+(t)] = 1$

$$\overset{\text{SVA}}{\Rightarrow} \quad \dot{\tilde{a}} = -\sum_k g_k^{F\,2} \int_0^t dt'\, \tilde{a}(t')\, e^{-i(\omega_k - \omega)(t-t')} + \hat{F}_{\tilde{a}}(t)$$

$$\hat{F}_a(t) = e^{i\omega t} f_a(t)$$

- für eng liegende Moden k gilt:
  Summation $\sum_k$ kann in Integration überführt werden wie in 4.4.3

$\rightarrow \dot{\tilde{a}} = -\frac{1}{2}\gamma_1 \tilde{a} + \hat{F}_{\tilde{a}}(t)$

$k = \frac{\omega}{c}$

$$\gamma_1 = 2\pi\, g_\omega^{F\,2} \underbrace{\frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3}}$$

$$= 2\pi\, g_\omega^2\, D(\omega)$$

$D(\omega)$: Zustandsdichte der Reservoir moden im leeren Raum

γ_1: Dämpfung der Feldmode

<u>Bemerkung</u>: Rausch Operator $\hat{F}(t)$ ist wichtig um Vertauschungsrelationen $[\tilde{a}(t), \tilde{a}^+(t)] = 1$ zu erfüllen.

<u>Beweis</u>: ohne Rauschen $F=0$

$\rightarrow \tilde{a}(t) = \tilde{a}(0)\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}$

$\rightarrow [\tilde{a}(t), \tilde{a}^+(t)] = e^{-\gamma_1 t}$

$\lightning$

d.h. Existenz von $\hat{F}_a$ zeigt, dass Dissipation (Dämpfung mit $\gamma/2$) mit Fluktuationen verbunden ist. (wie im klass. Dissipations-Flukt. Theorem)

- Eigenschaften von $F_{\tilde{a}}(t)$

1) $\langle F_{\tilde{a}}(t)\rangle_R = i \sum_k \overset{0}{\langle b_k^+(0)\rangle_R}\, g_k^F\, e^{-i(\omega_k - \omega)t} = 0$

2) $\langle F_{\tilde{a}}^+(t) F_{\tilde{a}}(t')\rangle_R = \sum_k \sum_{k'} g_k^F g_{k'}^F \underbrace{\langle b_k^+ b_{k'}\rangle_R}\, e^{-i(\omega_k - \omega)(t-t')}$

wieder $\sum \to \int$

$$= \int_0^\infty \underbrace{\frac{V\omega_k^2}{\pi^2 c^3}\, g_{\omega_k}^{F\,2}\, \bar{n}_{\omega_k}}_{\text{nur Wert bei } \omega \text{ trägt zum Integral bei}} e^{i(\omega_k-\omega)(t-t')}\, d\omega_k$$

$\bar{n}_k$

$$= \gamma\, \bar{n}_{th}\, \delta(t-t')$$

$\rightarrow$ unkorreliertes Rauschen

3) $\langle F_{\tilde{a}}(t) F_{\tilde{a}}^+(t') \rangle_R = (\bar{n}_{th}+1)\gamma\, \delta(t-t')$

4) $\langle F^+(t) F^+(t') \rangle_R = \langle F(t) F(t') \rangle = 0$

- Def. eines Diffusionskoeffizienten analog zur klass. Langevin Theorie

$$\langle F_{\tilde{a}}^+(t)\, F_{\tilde{a}}(t') \rangle_R = 2\langle D_{a^+a} \rangle_R\, \delta(t-t')$$

$$2\langle D_{\tilde{a}\tilde{a}}^+ \rangle_R = \gamma\, \bar{n}_{th}$$

Aus der Langevin Gl. können Bewegungsgleichungen für Mittelwerte hergeleitet werden

$$\text{z.B. } \frac{d}{dt}\langle a^+ a \rangle = \langle \dot{a}^+ a \rangle + \langle a^+ \dot{a} \rangle$$

benötigt für dafür ist Lösung $a(t)$ von $\dot{\hat{a}} = -\frac{1}{2}\gamma \hat{a} + F_{\tilde{a}}$

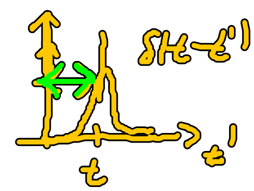
Ansatz: $\tilde{a} = A e^{\gamma/2 t} + C(t) e^{-\gamma/2 t}$

$$\rightarrow \boxed{\tilde{a}(t) = \tilde{a}(0)\, e^{-\gamma/2\, t} + \int_0^t dt'\, e^{-\gamma/2\,(t-t')} F_{\tilde{a}}(t')}$$

für $\langle \dot{\overline{a^+ a}} \rangle$ stößt man auf Terme der Form $\langle \tilde{F}_a^+(t)\, \tilde{a}(t) \rangle_R$

$$\langle \tilde{F}_a^+(t)\, \tilde{a}(t) \rangle_R = \langle F_a^+(t) \rangle_R\, \tilde{a}(0)\, e^{-\gamma/2\, t} + \int_0^t dt'\, e^{-\gamma/2\,(t-t')} \underbrace{\langle F_{\tilde{a}}^+(t)\, F_{\tilde{a}}(t') \rangle_R}_{\gamma\, n_{th}\, \delta(t-t')}$$

$$= \frac{\gamma}{2}\, \bar{n}_{th}$$



Mittelwertgleichung: (ohne Rauscheigenschaften)

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle a^+ a \rangle_R &= -\gamma \langle a^+ a \rangle_R + \gamma\, n_{th} \\ \frac{d}{dt}\langle a\, a^+ \rangle_R &= -\gamma \langle a\, a^+ \rangle_R + \gamma (n_{th} + 1) \end{aligned}}$$

$\leftrightarrow \dot{n}_{ph} = -\gamma\, n_{ph}$

$\rightarrow \gamma \mathrel{\hat{=}}$ Photonenlebensdauer

Korrelationsfunktionen des Feldes enthalten Quanteneigenschaften

$$G^{(1)} = \langle E^{(-)}(t),\, E^{(+)}(t+\tau) \rangle$$

$$E = E^{(-)} + E^{(+)} = \mathcal{E}\, a^+ + \mathcal{E}^*\, a$$

$\rightarrow$ wichtig ist $\langle \tilde{a}^+(0)\,\tilde{a}(0+\tau)\rangle_R = \langle \tilde{a}^+(0)\,\tilde{a}(0)\rangle e^{-\gamma\tau}$

$= n_{ph}\, e^{-\gamma\tau}$

Original Operatoren a

$$\langle a^+(0)\,a(t+\tau)\rangle_R = n_{ph}\, e^{-\gamma\tau - i\omega\tilde{\tau}}$$

Korrelationsfunktion $G^{(1)}$ klingt exp. mit γ ab.

Wiener Kinchin Theorem liefert Frequenzspektrum:

$$S(\tilde{\omega}) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \langle a^+(t)\,a(t+\tau)\rangle_R\, e^{i\tilde{\omega}\tilde{\tau}}\, d\tilde{\tau}$$

$$= \frac{n_{ph}}{\pi}\,\frac{\gamma}{(\tilde{\omega}-\omega)+\gamma^2}$$

Lorentz Funktion mit Peak bei $\tilde{\omega}=\omega$ und Breite γ.

- Einführung eines Quality Faktors Q

$$Q = \frac{\omega}{\gamma}$$

- Modenspektrum in einer leeren Kavität Raum angenähert werden durch $D_c(\omega) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\omega/2Q}{(\tilde{\omega}-\omega)^2 + \left(\frac{\omega}{2Q}\right)^2}$

(Vergleich im leeren Raum $D(\omega) = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3}$)

Erinnerung Atom + Reservoir $g^{(1)}(\tau) = e^{-\frac{W}{2}\tau}$