kleine Wiederholung

① wir haben in Kapitel 4 "Quantenstatistik" das Licht voll QM beschrieben und die Photonstatistik in verschiedenen Quantenzuständen untersucht

② wir haben ein angeregtes 2-Niveau System (Atom) und seine WW mit einem Reservoir
mit einer Lichtmode mit Hilfe von

1) Dichtematrixformalismus (abgespurtes Reservoir)
+ Markov Näherung
→ Master gleichung

2) Quanten Langevin gleichung
- Quanteneigenschaften im Rauschterm
→ Mittelwertgleichungen
Problem: Unendliches System von Mittelwertgleichungen durch WW Atom und Mode

$$H_{AP} = \hbar g \left(\sigma_+ a + \sigma_- a^+ \right)$$

untersucht

③ Photonenstatistik des emittierten Lichtes

④ Als Beispiel für Nichtgleichgewichtssystem wurden Lasergleichungen für "Atom-Laser" aufgestellt

Quanten Langevin Gl.

mit Variablen : - Lichtmode a (Frequenz ω)

- Polarisation $\hat{P} = \sum_{\mu} \hat{\sigma}^-_{\mu}$

↑ Atome

- Inversion $\hat{D} = \sum_{\mu} \sigma^z_{\mu}$

Annahmen waren: • Reservoir • hat viele Freiheitsgrade

• wird nicht verändert durch WW

• dichtliegende Moden $\rightarrow \sum \rightarrow \int$

• RWA → keine Prozesse ohne Energieerhaltung

• Dipol Näherung der Licht-Materie WW

• optisches Pumpen durch invertiertes Reservoir

aus HAF

$$\dot{\hat{a}} = \left(-i\omega - \frac{\gamma}{2}\right)\hat{a} + g\hat{P}^- + \hat{F}^a(t)$$

$$\dot{\hat{P}}^+ = \left(i\omega_a - \frac{\tilde{W}}{2}\right)\hat{P}^+ + g a^+\hat{D} + \hat{F}_{ab}(t)$$

$$\dot{\hat{D}} = -\tilde{W}\hat{D} + W - 2g\left(\hat{a}^+\hat{P}^- + \hat{a}\hat{P}^+\right) + \hat{F}_z(t)$$

Laser gleichungen

Rauschterme F: resultieren aus Integrieren der dyn. Gleichung für Reservoir Photonen Vernichter

$(\dot{b}_k)$

Problem: so direkt nicht lösbar

Näherungsverfahren nötig:

1. Mögl. • Asymptotische Entwicklung in Potenzreihe eines kleinen Parameters

N ist groß $\rightarrow$ Entwicklung nach Systemgröße um Gl. der Form

" $\dot{x} = N^0 F(x) + \frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{F}(x) + O(\frac{1}{N})$ "

• dazu nötig: Einführen neuer Variablen

$\tilde{a} = \frac{a}{\sqrt{N}}$ $\rightarrow$ a^+a Photonenzahl
$\tilde{a}^+\tilde{a} = a^+a/N$ Photonen pro Atom

$\tilde{P} = P/N$; $\tilde{D} = D/N$ Pol. und Inversion pro Atom

$\tilde{g} = g\sqrt{N}$

Atom Rauschterme

$\tilde{F}_{ab} = \frac{F_{ab}}{\sqrt{N}}$; $\tilde{F}_z = F_z/\sqrt{N}$

$\Rightarrow$

Feld: $\dot{\tilde{a}} = -\frac{\varkappa}{2}\tilde{a} + \tilde{g}\tilde{p} + \frac{1}{\sqrt{N}}\hat{F}^{a}(t)$

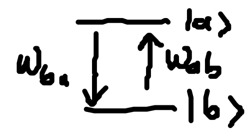
Pol.: $\dot{\tilde{p}}^{+} = \tilde{g}\tilde{a}^{+}\tilde{D} - \frac{1}{2T}\tilde{p}^{+} + \frac{1}{\sqrt{N}}\tilde{F}_{ab}(t)$

Inversion: $\dot{\tilde{D}} = -2\tilde{g}(\tilde{a}^{+}\tilde{p}^{-} + \tilde{a}\tilde{p}^{+}) + \frac{D_0 - \tilde{D}}{T} - \frac{1}{\sqrt{N}}\tilde{F}_{z}(t)$

- freie Dynamik durch SVA beseitigt
- $D_0 = \frac{W}{\tilde{W}}$, $T = \tilde{W}^{-1}$

Pumprate

$W = W_{ab} - W_{ba}$



Entwicklung 0. Ordnung in $N^{-1/2}$

4.5.2. Übergang zu semiklassischen Lasergleichungen

0. Ordnung in $\frac{1}{\sqrt{N}}$:
- Quanten Eigenschaften (Rauschen) fällt weg
- Kommutatoren der Operatoren $\hat{a}, \hat{p}, \hat{D}$ sind $O(\frac{1}{N})$ $\longrightarrow$ werden vernachlässigt
  $\longrightarrow$ statt Operatoren werden komplexe Größe betrachtet

$\longrightarrow$ semiklassische Lasergleichungen

$$\boxed{\begin{aligned}
\dot{\tilde{\alpha}} &= -\frac{\gamma}{2}\tilde{\alpha} + \tilde{g}\tilde{P}^- && (1)\\
\dot{\tilde{P}}^+ &= g\tilde{\alpha}^+\tilde{D} - \frac{1}{2T}\tilde{P}^+ && (2)\\
\dot{\tilde{D}} &= -2\tilde{g}\left(\tilde{\alpha}^+\tilde{P}^- + \tilde{\alpha}\tilde{P}^+\right) + \frac{D_0 - D}{T} && (3)
\end{aligned}}$$

Stationäre Lösungen: (ohne Schlangen geschrieben)

$(2) = 0 \quad \longrightarrow \quad P^+ = 2gT\alpha^+ D$

$\qquad\qquad\qquad\quad P^- = 2gT\alpha D \qquad (\mathrm{II})$

einsetzen in $(1) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\gamma}{2}\alpha = g\,(2gT\alpha D)$

$\qquad\qquad\qquad\quad \longrightarrow \quad 0 = \underline{\underline{\alpha}}\underline{\underline{\left(\frac{\gamma}{2} - 2g^2TD\right)}}$

1. Lösung

$\alpha = 0$

2. Lösung

$2g^2TD = \frac{\gamma}{2}$

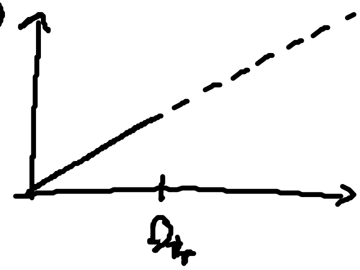
$D = \frac{\gamma}{4g^2T}$

einsetzen von (II) in $(3) = 0 \quad \longrightarrow \quad 0 = -2g \cdot 4gTD\alpha^+\alpha + \frac{D_0 - D}{T}$

$$D(\alpha^+\alpha) = \frac{D_0/T}{\frac{1}{T} + 8g^2T\alpha^+\alpha} \qquad (\mathrm{III})$$

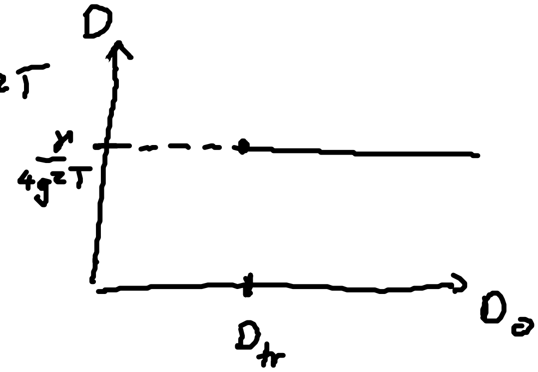
Es gibt zwei Lösungen des DGL Systems. Für die Inversion ergibt sich:

1. lösung $a = 0$

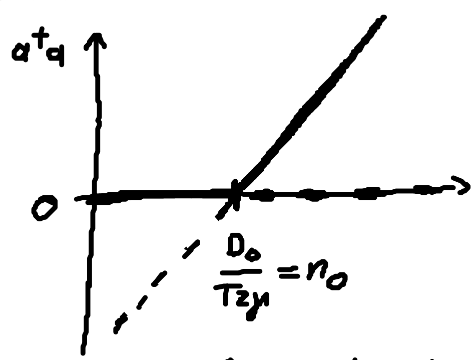


$D_0 \,\hat{=}\,$ Pumpstärke

2. lösung $D = \frac{\gamma}{4g^2T}$



Photonenzahl $n = a^\dagger a$



Laserschwelle

$$D_{tr} = \frac{2\gamma}{8g^2T}$$

$$C_{tr} = 1$$

$$(\mathrm{III}) \Leftrightarrow \frac{\gamma}{4g^2T} = \frac{D_0/T}{\frac{1}{T} + 8g^2T a^\dagger a}$$

$\rightarrow$

$$a^\dagger a = \frac{D_0}{T2\gamma} - (8g^2T^2)^{-1}$$

$$= \frac{D_0}{T2\gamma} - n_0$$

Sättigungs-Photonenzahl

$$\boxed{n = n_0(C-1)}$$

$$C = \frac{4g^2D_0T}{\gamma}$$

normierte Pumpstärke

- Dynamik?

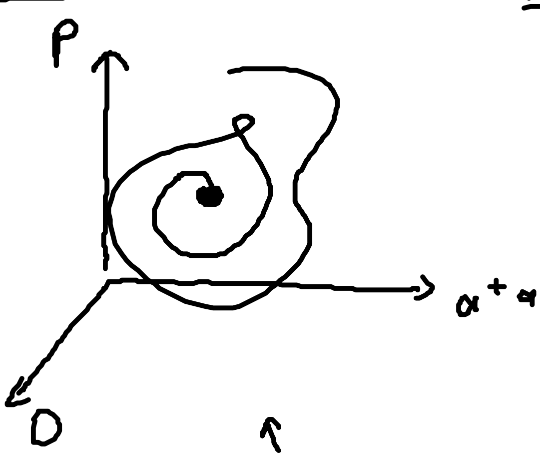
Zeitskalen im System:

T: Lebensdauer der Atome

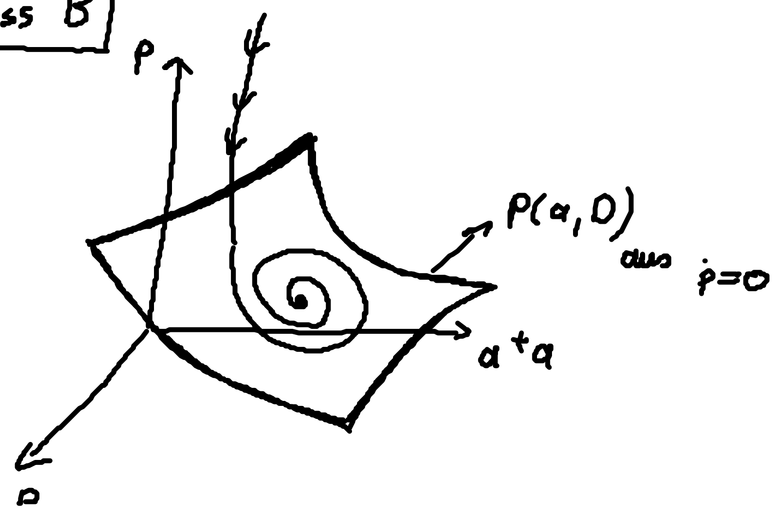
γ^{-1}: Lebensdauer der Photonen der Mode in Kavität

$\tilde{g}^{-1}$: Atom Feld Kopplung (optisches Dipolmatrixelement)

Class C



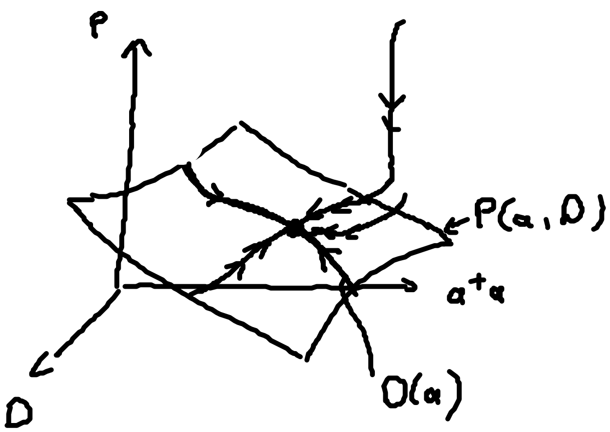
Class B



• alle Zeitskalen vergleichbare Größenordnung

• Polarisation schnell
-> Dynamik nach kurzer Zeit auf 2D Mannigfaltigkeit
-> 2 dyn. Freiheitsgrade

Class A



• Ladungsträger D schneller als Photonen
-> 1 dyn. Freiheitsgrad (nur a)

Eliminierung der schnellen Variablen: "Adiabatische Eliminierung" d.h. Bestimmung des statischen Zusammenhanges $\rho(a, D)$ aus $\dot{\rho} = 0$

Für sem. Lasergleichungen heißt das:

$\dot{\rho}^- = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\rho^- = 2gTaD}$

Einsetzen in 2 restlichen DGL's.

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{\tilde{a}} &= -\frac{\gamma}{2}\tilde{a} + 2\tilde{g}^2 T \tilde{a} \tilde{D} \\ \dot{\tilde{D}} &= -2\tilde{g}\left(4gTa^+aD\right) + \frac{D_0 - D}{T} \end{aligned}}$$

Umschreiben auf Photonzahl $a^+a = n$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{n} &= -\gamma n + 4g^2TnD \\ \dot{D} &= -8g^2TnD + \frac{D_0 - D}{T} \end{aligned}}$$

optische Verluste γn

stimulierte Emission $R_{ind} = W'nD$

klassische Ratengleichungen für Laser Dynamik

- keine Quanten Eigensch.
- für Zeitskalen größer als Pol. Lebensdauer
- für große Atom Zahlen