kleine Wiederholung

① wir haben in Kapitel 4 "Quantenstatistik" das Licht voll QM beschrieben und die Photonstatistik in verschiedenen Quantenzuständen untersucht

② wir haben ein angeregtes 2-Niveau System (Atom) und seine WW mit einem Reservoir
mit einer Lichtmode mit Hilfe von

1) Dichtematrixformalismus (abgespurtes Reservoir)
+ Markov Näherung
→ Master Gleichung

2) Quanten Langevin Gleichung
• Quanteneigenschaften im Rauschterm
→ Mittelwertgleichungen
Problem: Unendliches System von Mittelwertgleichungen durch WW Atom und Mode

$$H_{AF} = \hbar g(\sigma_+ a + \sigma_- a^+)$$

untersucht

③ Photonenstatistik des emittierten Lichtes

④ Als Beispiel für Nichtgleichgewichtssystem wurden Lasergleichungen für "Atom-Laser" aufgestellt

Quanten Langevin Gl.

mit Variablen: - Lichtmode a (Frequenz ω)

- Polarisation $\hat{p} = \sum_{\mu} \hat{\sigma}^-_{\mu}$

μ → Atome

- Inversion $\hat{D} = \sum_{\mu} \hat{\sigma}^z_{\mu}$

Annahmen waren:
- Reservoir
  - hat viele Freiheitsgrade
  - wird nicht verändert durch WW
  - dichtliegende Moden $\rightarrow \sum \rightarrow \int$
- RWA → keine Prozesse ohne Energieerhaltung
- Dipol Näherung der Licht-Materie WW
- optisches Pumpen durch invertiertes Reservoir

aus H_{AF}

$$\dot{\hat{a}} = \left(-i\omega - \frac{\gamma}{2}\right)\hat{a} + g\,\hat{p}^- + \hat{F}^a(t)$$

$$\dot{\hat{p}}^+ = \left(i\omega_a - \frac{\tilde{W}}{2}\right)\hat{p}^+ + g\,a^+\hat{D} + \hat{F}_{ab}(t)$$

$$\dot{\hat{D}} = -\tilde{W}\hat{D} + W - 2g\left(\hat{a}^+\hat{p}^- + \hat{a}\,\hat{p}^+\right) + \hat{F}_z(t)$$

Lasergleichungen

Rauschterme F: resultieren aus Integrieren der dyn. Gleichung für Reservoir Photonen Vernichter

($\dot{b}_{12}$)

Problem: so direkt nicht lösbar

Näherungsverfahren nötig:

1. Mögl. • Asymptotische Entwicklung in Potenzreihe eines kleinen Parameters

N ist groß $\rightarrow$ Entwicklung nach Systemgröße

um Gl. der Form

$$\text{"} \; \dot{x} = N^0 F(x) + \frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{F}(x) + O\left(\frac{1}{N}\right) \text{"}$$

• dazu nötig: Einführen neuer Variablen

$\tilde{a} = \frac{a}{\sqrt{N}}$ $\rightarrow$ $a^+ a$ Photonenzahl

$\tilde{a}^+ \tilde{a} = a^+ a / N$ Photonen pro Atom

$\tilde{P} = P/N$; $\tilde{D} = D/N$ Pol. und Inversion pro Atom

$\tilde{g} = g\sqrt{N}$

Atom Rauschterme

$\tilde{F}_{ab} = \frac{F_{ab}}{\sqrt{N}}$; $\tilde{F}_z = F_z / \sqrt{N}$

$$\Rightarrow$$

Feld: $\dot{\tilde{\alpha}} = -\frac{\varkappa}{2}\tilde{\alpha} + \tilde{g}\tilde{p} + \frac{1}{\sqrt{N}}\hat{F}^{\alpha}(t)$

Pol.: $\dot{\tilde{p}}^{+} = \tilde{g}\tilde{\alpha}^{+}\tilde{D} - \frac{1}{2T}\tilde{p}^{+} + \frac{1}{\sqrt{N}}\tilde{F}_{ab}(t)$

Inversion: $\dot{\tilde{D}} = -2\tilde{g}(\tilde{\alpha}^{+}\tilde{p}^{-} + \tilde{\alpha}\tilde{p}^{+}) + \frac{D_0 - \tilde{D}}{T} - \frac{1}{\sqrt{N}}\tilde{F}_{z}(t)$

Entwicklung 0. Ordnung in $N^{-1/2}$

- freie Dynamik durch SVA beseitigt
- $D_0 = \frac{W}{\tilde{W}}$, $T = \tilde{W}^{-1}$

Pumprate

$W = W_{ab} - W_{ba}$

$W_{ba}\downarrow\ \uparrow W_{ab}$, $|a\rangle$, $|b\rangle$

4.5.2. Übergang zu semiklassischen Lasergleichungen

0. Ordnung in $\frac{1}{\sqrt{N}}$:
- Quanten Eigenschaften (Rauschen) fällt weg
- Kommutatoren der Operatoren $\hat{\alpha}, \hat{p}, \hat{D}$ sind $O(\frac{1}{N})$ $\rightarrow$ werden vernachlässigt

$\rightarrow$ statt Operatoren werden komplexe Größen betrachtet

$\rightarrow$ semiklassische Lasergleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\tilde{a}} &= -\frac{\gamma}{2}\tilde{a} + \tilde{g}\,\tilde{p}^- && (1) \\ \dot{\tilde{p}}^+ &= g\,\tilde{a}^+\tilde{D} - \frac{1}{2T}\tilde{p}^+ && (2) \\ \dot{\tilde{D}} &= -2\tilde{g}\left(\tilde{a}^+\tilde{p}^- + \tilde{a}\,\tilde{p}^+\right) + \frac{D_0 - D}{T} && (3) \end{aligned}}$$

Stationäre Lösungen: (ohne Schlangen geschrieben)

$(2) = 0 \longrightarrow$

$$p^+ = 2gTa^+D$$
$$p^- = 2gTaD \qquad \text{(II)}$$

einsetzen in $(1) = 0 \longrightarrow \frac{\gamma}{2}a = g(2gTaD)$

$$\longrightarrow \quad 0 = \underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{\left(\frac{\gamma}{2} - 2g^2TD\right)}}$$

1. Lösung
$a = 0$

2. Lösung
$2g^2TD = \frac{\gamma}{2}$

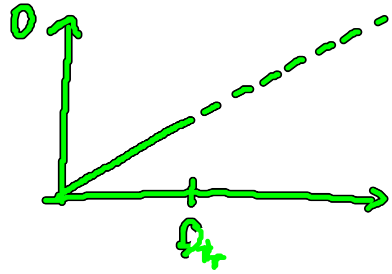
$$D = \frac{\gamma}{4g^2T}$$

einsetzen von (II) in $(3) = 0 \longrightarrow 0 = -2g \cdot 4gTDa^+a + \frac{D_0 - D}{T}$

$$D(a^+a) = \frac{D_0/T}{\frac{1}{T} + 8g^2Ta^+a} \qquad \text{(III)}$$

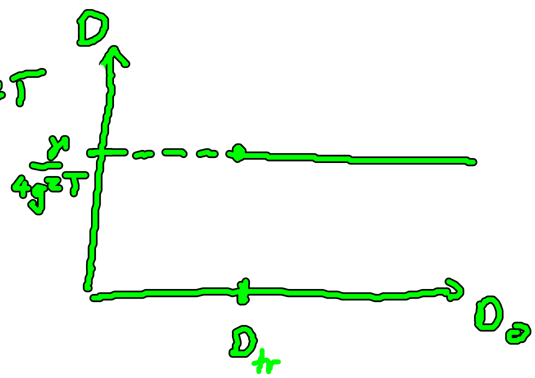
Es gibt zwei Lösungen des DGL Systems. Für die Inversion ergibt sich:

1. Lösung $a = 0$

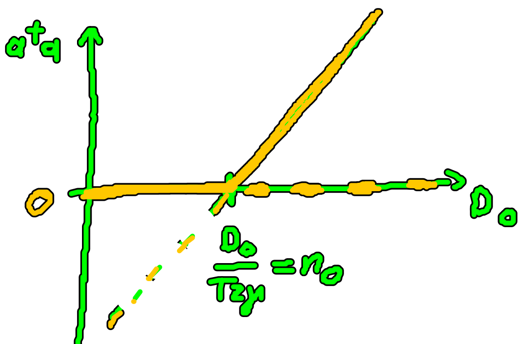


$D_0 \hat{=}$ Pumpstärke

2. Lösung $D = \frac{\gamma}{4g^2T}$



Photonenzahl $n = a^+a$



Laserschwelle

$$D_{tr} = \frac{2\gamma}{8g^2T}$$

$$C_{tr} = 1$$

$$(\text{III}) \Rightarrow \frac{\gamma}{4g^2T} = \frac{D_0/T}{\frac{1}{T} + 8g^2T\,a^+a}$$

$\rightarrow$

$$a^+a = \frac{D_0}{T2\gamma} - (8g^2T^2)^{-1}$$

$$= \frac{D_0}{T2\gamma} - n_0$$

$\uparrow$ Sättigungs-Photonenzahl

$$\boxed{n = n_0(C-1)}$$

$$C = \frac{4g^2D_0T}{\gamma}$$

$\uparrow$ normierte Pumpstärke

- Dynamik?

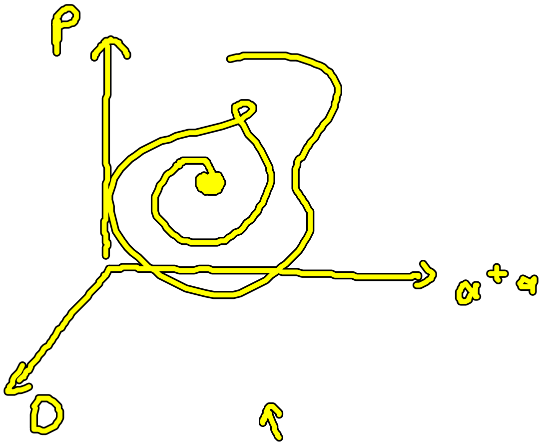
Zeitskalen im System:

T: Lebensdauer der Atome

γ^{-1}: Lebensdauer der Photonen der Mode in Kavität

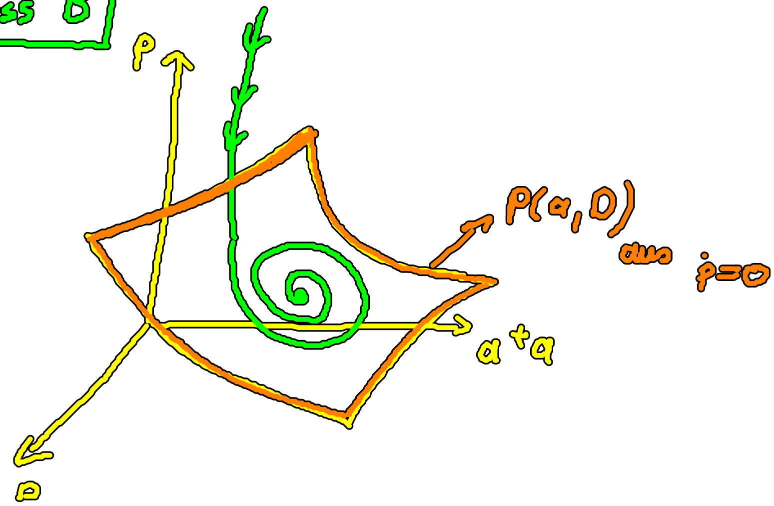
g^{-1}: Atom Feld Kopplung (optisches Dipolmatrixelement)

Class C



• alle Zeitskalen · vergleichbare Größenordnung

Class B

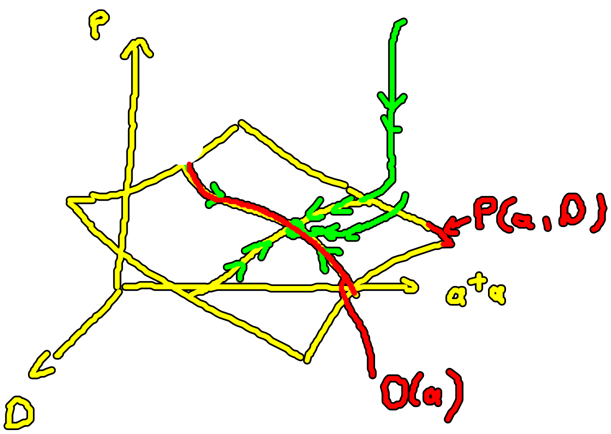


• Polarisation schnell

→ Dynamik nach kurzer Zeit auf 2D Mannigfaltigkeit

→ 2 dyn. Freiheitsgrade

Class A



• Ladungsträger D schneller als Photonen

→ 1 dyn. Freiheitsgrad (nur a)

Eliminierung der schnellen Variablen: "Adiabatische Eliminierung" d.h. Bestimmung des statischen Zusammenhanges $P(\alpha, D)$ aus $\dot{P}=0$

Für sem. Laserglcichungen heißt das:

$$\dot{p}^- = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{p^- = 2gT\alpha D}$$

Einsetzen in 2 restlichen DGL's.

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{\tilde{\alpha}} &= -\frac{\gamma}{2}\tilde{\alpha} + 2\tilde{g}^2 T \tilde{\alpha} \tilde{D} \\ \dot{\tilde{D}} &= -2\tilde{g}\left(4gT\alpha^+\alpha D\right) + \frac{D_0 - D}{T} \end{aligned}}$$

Umschreiben auf Photonzahl $\alpha^+\alpha = n$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{n} &= -\gamma n + \underbrace{4g^2 T n D}_{\text{stimulierte Emission}} \\ \dot{D} &= -8g^2 T n D + \frac{D_0 - D}{T} \end{aligned}}$$

optische Verluste γn

stimulierte Emission $R_{ind} = W' n D$

klassische Ratengleichungen für Laser Dynamik

- keine Quanten Eigensch.
- für Zeitskalen größer als Pol. Lebensdauer
- für große Atom Zahlen