

## 5.4. Drift-Diffusions Gleichung

- Ausgehend von der Boltzmann-Gleichung

lassen wir Bilanzgleichungen für Teilchendichte  $n$  (Mittelwert)  
Energiedichte  $n\bar{E}$  (2. Moment)  
Impulsdichte  $n\bar{p}$  (1. Moment von  $f$ )

hergeleitet.

- Ein geschlossenes System von Bilanzgl. erhält man unter folgenden Näherungsannahmen

(i)  $T_{ij} = T_e \delta_{ij}$  (skalare Elektronen Temperatur)

$$kT_{ij} = m^* \langle (v_i - \langle v_i \rangle)(v_j - \langle v_j \rangle) \rangle$$

(ii) Wärmestromdichte  $j_Q = -\kappa \nabla_r T_e$

(Phänomenologischer Ansatz mit Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$ )

NB: Wärmestromdichte ist für die numerische Stabilität der Lösungen der Bilanzgl. wichtig

(iii) Die Stoßraten  $J_0, J_1, J_2$  müssen durch  $n, p, \bar{E}$

ausgedrückt werden.

g-r-Raten  $J_0 = \varphi(n, \bar{E})$  (nichtlinear in  $n, \bar{E}$ )

Impulsrelax. Raten  $J_1 = -n \frac{p}{\tau_n(\bar{E})}$  (nichtlin. Impulsrelax.zeit  $\tau_n(\bar{E})$ )

Energierelax. Raten  $J_2 = -n \frac{\bar{E} - E_0}{\tau_e(\bar{E})}$  (nichtlin. Energierelax.zeit  $\tau_e(\bar{E})$ )

$$E_0 = \frac{3}{2} kT$$

Bilanzgleichungen für die 3 Variablen  $n, \bar{p}, \bar{E}$

$$\textcircled{1} \quad \frac{\partial}{\partial t} n + \nabla_r (n \underline{v}) = \underline{\varphi}(n, \bar{E})$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{p} + (v \nabla_r) \bar{p} + \frac{1}{n} \nabla_r (n k T_e) + e \underline{E} = - \frac{\varphi(n, \bar{E})}{n} p - \frac{p}{\tau_n(\bar{E})}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{E} + v \cdot \nabla_r \bar{E} + \frac{1}{n} \nabla_r (n k T_e v) - \frac{1}{n} k \Delta T_e + e v \cdot \underline{E} = \underline{\varphi} \bar{E} - \frac{\bar{E} - E_0}{\tau_e(\bar{E})}$$

Konvektion
Druck
Wärmestrom
 Joule-  
Wärme

Hierbei wurde  $\frac{\partial}{\partial t} (n p) = \dot{n} p + n \dot{p}$  /  $\frac{\partial}{\partial t} (n \bar{E}) = \dot{n} \bar{E} + n \dot{\bar{E}}$

sowie  $\nabla_r (n \underline{v}) = -\dot{n} + \varphi(n, \bar{E})$

und  $\nabla_r (n \underline{v} \bar{E}) = (\nabla_r \cdot n \underline{v}) \bar{E} + n \underline{v} \cdot \nabla_r \bar{E}$

Die abhängigen Variablen  $\underline{v}$ ,  $T_e$  sind durch

$$\underline{p} = m^+ \underline{v}$$

und  $\bar{E} = \frac{m^+}{2} \underline{v}^2 + \frac{3}{2} k T_e$  bestimmt.

Aus ② folgt die dynamische mechanische Stromgleichung

$$\underline{j} = (-e) n \underline{v} = -\frac{e}{m^+} n \underline{p}$$

①

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \underline{j} = \frac{\partial}{\partial t} \underline{j} + (\underline{v} \nabla_r) \underline{j} \stackrel{\text{②}}{=} \frac{e^2 n}{m^+} \underline{E} + \nabla_r \left( \frac{e n}{m^+} k T_e \right) - (\nabla_r \underline{v}) \underline{j} - \frac{\underline{j}}{\tau_m}$$

Drift

kompress. Strömung

Drift Diffusions Näherung:

Ableitung im mitbewegten Koordinatensystem

$$\frac{d}{dt} \underline{p} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \nabla_r \right) \underline{p} = -e \underline{E} - \frac{1}{n} \nabla_r (n k T_e) - \frac{4 \mu_i \bar{E}}{n} \underline{p} - \frac{\underline{p}}{\tau_m(\sigma)}$$

$$\frac{d}{dt} \underline{j} = \frac{e^2 n}{m^+} \underline{E} + \nabla_r \left( \frac{e n}{m^+} k T_e \right) - (\nabla_r \underline{v}) \underline{j} - \frac{\underline{j}}{\tau_m}$$

Näherungsannahmen:

(i)  $\frac{d}{dt} \underline{p} = 0$  (mitt. Impuls stationär im mitbewegten System)

(ii)  $T_e(\underline{r}) = \text{const.}$  (Elektronentemperatur ortsunabhängig /

iii) Es gilt eine verallgemeinerte Einstein-Beziehung

$$\frac{eD}{kT_e} = \mu$$

$\mu$  Beweglichkeit

$$\mu := \frac{e}{m^*} \tau_m$$

⑤  $\rightarrow$   $\underline{j} = en\mu \underline{E} + kT_e \mu \nabla_r n$

Driftstrom

Diffusions-  
stromdichte

oder

$$\underline{v} = -\mu \underline{E} - \frac{D}{n} \nabla_r n$$

Anmerkung: Für kleine Felder ist  $\mu$  und  $D$  konstant

• Für große Felder hängt  $\mu$  über  $\tau_m$  und  $\mu$  von  $\underline{E}$  und  $n$  ab.

Nimmt man weiterhin eine stationäre räumlich homogene Energiebilanz an, folgt aus ③

⑥

$$e\underline{v} \underline{E} = - \frac{\bar{E} - E_0}{\tau_c(\bar{E})} - \frac{\varphi(n, \bar{E})}{n} \bar{E}$$

Gleichung ⑤ mit Kontinuitätsgleichung für Teilchenströme

$$\frac{\partial}{\partial t} n - \frac{1}{e} \nabla_r j_n = \psi_n(n, p, \mathcal{E})$$

und den entsprechenden Zwischengleichungen

(Ladungsdichte  
 $\rho = \int j_n(x, t, t) d^3k$ )

$$\textcircled{1} \frac{\partial}{\partial t} p + \frac{1}{e} \nabla_r j_p = \psi_p(n, p, \mathcal{E})$$

↑ Stoßprozesse

$$\textcircled{2} j_p = e \mu_p p \underline{E} - e D_p \nabla p$$

sind sind die "klassischen" Halbleitertransportgleichungen.

Bem.: Sie sind zu ergänzen durch die Maxwell Gleichungen

$$\textcircled{10} \nabla \underline{E} = \frac{e}{\epsilon_0} \underline{E} (n - p) \quad (\text{keine Dotierung, Störstellen})$$

$$\textcircled{11} \nabla \times \underline{E} = -\mu_0 \dot{\underline{H}}$$

$$\textcircled{12} \nabla \cdot \underline{H} = 0$$

$$\textcircled{13} \nabla \times \underline{H} = \epsilon_0 \dot{\underline{E}} + (\dot{j}_n + \dot{j}_p)$$

+ Randbedingungen.

→ Die Gln.  $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{7}-\textcircled{13}$  bilden die Basis zum Verständnis der wichtigsten Halbleiterbauelemente (pn-Übergang, Transistoren)

Mit Hilfe der nichtlinearen Raten  $\psi(n, \mathcal{E})$  können auch

auf dieser "vergrößerten" Beschreibungsstufe viele

nichtlineare Transportphänomene

z.B. - Negative differentielle Leitfähigkeit

- Bistabilität

- Stromfilamente, räumliche Strukturbildung

- chaotische Oszillationen