Lösung der Dirac-Gleichung gegeben durch ebene Wellen:

$$\underbrace{\vec{\psi}_{p,\lambda,m_s}}_{\substack{\text{3 Quantenzahlen}}} = \left(\frac{mc^2 + E_\lambda(p)}{2E_\lambda(p)}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \vec{\chi}_{m_s} \\ \frac{c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_\lambda + m_0 c^2}\vec{\chi}_{m_s} \end{pmatrix} e^{-i\left(\frac{E_\lambda(p)}{\hbar}t - \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right)}$$

3 Quantenzahlen

Impuls, Energiezweig ($\pm$), Spinquantenzahl

(Interpretation heute)

m_s hat 2 Werte $\longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \chi_{m_s}$

momentaner Stand: ebene Wellen ψ_{p,λ,m_s} die Eigenfunktionen

zu folgenden Operatoren sind:

- Hamiltonoperator $\underline{H}$ der Diracgleichg., Quantenzahl λ, Energieeigenwert $E_\lambda(p)$

$$i\hbar\partial_t \vec{\psi} = \underline{H}\vec{\psi}$$

- Impulsoperator $\vec{\underline{p}}$, Quantenzahl $\vec{p}$, Impulseigenwert $\vec{p}$

- Operator ?, Quantenzahl m_s, Eigenwert ?

$\downarrow$

wird der Helizitätsoperator sein

$$\underline{\Lambda} = \underline{\hat{\vec{s}}} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$$

$$\hat{s}^i = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^i & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}^i \end{pmatrix}$$

bilden vollständiges System v. Observablen

<u>Beweis der Normierung:</u>

obere Komponente $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

untere Komponente $\underbrace{\frac{c\,\vec{\hat{\sigma}} \cdot \vec{p}}{E_\lambda + m_0 c^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$$= \frac{c}{E_\lambda + m_0 c^2}\left[\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\hat\sigma^1} p_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}_{\hat\sigma^2} p_y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\hat\sigma^3} p_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{c}{E_\lambda + m_0 c^2}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ p_x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ p_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_z \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

Gesamtvektor vor der Normierg.:

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c}{E_\lambda + m_0 c^2}\, p_z \\ -"- \,(p_x + i p_y) \end{pmatrix}$$

$$;\ \psi^\dagger \psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2$$

$$= 1 + 0 + \frac{c^2 p^2}{(E_\lambda + m_0 c^2)^2} = \frac{(E_\lambda + m_0 c^2)^2 + c^2 p^2}{(E_\lambda + m_0 c^2)^2}$$

$$= \frac{(\quad)^2 + E_\lambda^2 - m_0^2 c^4}{(\quad)^2}$$

$$= \frac{2 E_\lambda^2 + 2 E_\lambda m_0 c^2}{(\quad)^2}$$

$$= \frac{2 E_\lambda}{\quad}$$

$E_\lambda + m_0 c^2$

Normierg. stimmt!

2.5 Ebene Wellen als Lösungen: Spinfreiheitsgrad u. Energie

OBdA: ebene Welle in z-Richtung, $\vec{p} = p_z \vec{e}_z$

$$\underline{\Lambda} = \vec{\hat{S}} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_3 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_3 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Helizitäts-operator

ebene Welle in z-Richtg.

Nachweis, daß $\begin{pmatrix} \chi_{m_s} \\ \chi_{m_s} \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von $\underline{\Lambda}$ sind:

$$\underline{\Lambda}\begin{pmatrix} \chi_{\frac{1}{2}} \\ \chi_{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\frac{\hbar}{2}$$

$m_s = \frac{1}{2}$

$$\underline{\Lambda}\begin{pmatrix} \chi_{-\frac{1}{2}} \\ \chi_{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$m_s = -\frac{1}{2}$

→ Die Vierspinor ebenen Wellen sind also auch Eigenzustände des Helizitätsoperators zum Eigenwert $\pm\frac{\hbar}{2}$.

Es gibt also für jeden Impuls 4 Zustände: $\psi_{\pm,\pm\frac{1}{2},p}$

Diese 4 Lösungen sind:

$$\vec{\psi}_{p,+,+\frac{1}{2}} = N_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E_+ + m_0c^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-i\left(\frac{E_+(p)t}{\hbar} - \frac{p_z z}{\hbar}\right)}$$

Normierg. $N_+(E_+)$

$$= N_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ cp_z/(E_+ + m_0c^2) \\ 0 \end{pmatrix} e^{\cdots}$$

$$\vec{\psi}_{p,+,-\frac{1}{2}} = N_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -cp_z/(E_+ + m_0c^2) \end{pmatrix}$$

$$\vec{\psi}_{p,-,+\frac{1}{2}} = N_- \begin{pmatrix} -cp_z/(E_- + m_0c^2) \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\psi}_{p,-,-\frac{1}{2}} = N_- \begin{pmatrix} 0 \\ cp_z/(E_- + m_0c^2) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Im Gegensatz zu Schrödinger gl. hat man 4 unabhängige Lösungen zu einem festen Impuls. 2 neue Aspekte:
- Spin (2 neue Lsg.)
- Energie (2 neue Lsg.)

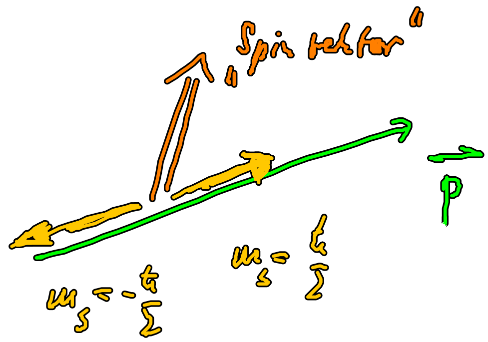
a) Eigenschaften des neuen Spinfreiheitsgrades

Die Wellenfunktion des Teilchens hängt nicht nur vom Ort $\vec{r}$ ab (zugeordnete Größe $\vec{p}$), sondern es gibt einen weiteren Freiheitsgrad durch Vektoreigenschaft, wird Spinfreiheitsgrad genannt.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ort } \vec{r} \\ \text{Spin } \vec{\hat{s}} \end{array}\right\} \text{2 Observable liegen also vor.}$$

Spinoperator, Vektor aus Viermatrizen die aus den Paulimatrizen aufgebaut werden

meßbar sind Eigenwerte, hier, um Spin zu detektieren die Eigenwerte von $\underline{\Lambda} \simeq \hat{\vec{s}} \cdot \vec{p}$



Es sind 2 Einstellungen meßbar, deshalb spricht man von Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen.

Es existiert eine Analogie zwischen Drehimpuls und Spin:

<u>Drehimpuls $\vec{\ell}$</u>

$[\underline{\ell}_j, \underline{\ell}_k] = i\, \underline{\ell}_m$ zyklisch $\qquad [\hat{s}_j, \hat{s}_k] = i\, \hat{s}_m$

$[\underline{\ell}^2, \vec{\ell}\,] = 0 \qquad [s^2, \vec{s}\,] = 0$

$\underline{\ell}^2\, Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = \hbar^2\, \ell(\ell+1)\, Y_{\ell m} \qquad \underline{s}^2\, \vec{\chi}_{m_s} = \hbar\, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) \vec{\chi}_{m_s}$

$l_z Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \hbar m_l Y_{lm}$ $\qquad s_z \vec{\chi}_{m_s} = \hbar m_s \vec{\chi}_{m_s}$

$l = 0, 1, 2 \ldots$ $\qquad s = \frac{1}{2}$

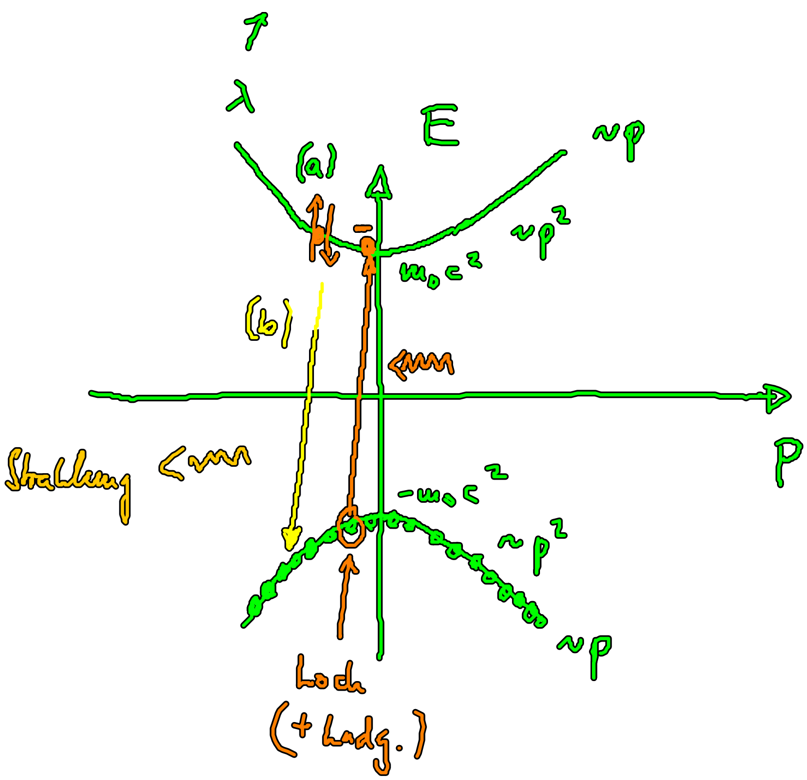
$m_l = -l \ldots -1, 0, +1 \ldots +l$ $\qquad m_s = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$ $\quad$ ÜA

→ Interpretation des Spins als Eigendrehimpuls

b) Energiespektrum

Es existieren 2 Zweige f. mögl. Energie:

$$E_\pm = \pm c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$$



quadratischer Beginn in p

linear für große p

Jede Impuls kann mit 4 Elektronen besetzt werden

↑↓ pro ±

a) Schrödingergleichung findet man bei $\lambda = +,\ p \to 0$

$$E_+ = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}}\; m_0 c^2 \xrightarrow[p \to 0]{} \underline{\underline{m_0 c^2}} + \underline{\underline{\frac{p^2}{2 m_0}}}$$

unbeobachtet

de Broglie, bzw. Dispersion bei Schrödinger

b) Jedes Elektron im + Zustand könnte durch Energieabgabe an das Strahlungsfeld zerfallen.

Um den Zerfall zu verbieten hat Dirac angenommen, daß alle − Zustände durch Elektronen besetzt sind. Dieser Kunstgriff verbietet den strahlenden Übergang.

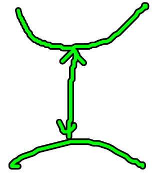
Führt zu Problemen weil dann dem Vakuum damit Eigenschaften zugesprochen würden, u.a. ∞ viele Teilchen, Energie.

Die Diracgleichung ist <u>eigentlich</u> eine Gleichg. für viele Elektronen → „Vielteilchentheorie"

Auflösg. der Probleme in QFT.

c) Teilchen − Antiteilchen Erzeugg. aus dem Vakuum durch energiereiche Strahlg., dabei entsteht Elektron + Loch im „Diracsee"

$$\hbar\omega = E_+ - E_-$$



Strahlg. $\nearrow$

$$= E_+ + |E_-|$$

mindestens $2\times$ Ruheenergie

$E_+ \downarrow$ Elektronenergie, $|E_-| \downarrow$ Lochenergie } wird als Energie eines erzeugten Positrons beobachtet, z.B. über Impuls

<u>Positron</u>: Teilchen mit derselben Ruhemasse d. Elektron aber entgegengesetzte Ladg. im Diracsee „Antiteilchen“

d) Vier Komponenten von $\vec{\psi}$ können als

$$\begin{pmatrix} \text{Teilchen} \\ \text{Teilchen} \\ \text{Antiteilchen} \\ \text{Antiteilchen} \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim e^{-iE_+ t} \\ \\ \sim e^{-iE_- t} \end{matrix}$$

$(p \to 0)$

siehe nächste VL.