III Nichtrelativistische Quantenfeldtheorie und Anwendungen

Ziel: einheitliche Beschreibung v. Teilchen (Elektron, Ion) und Feldern (elektromagnetisches Feld)

dazu: Schrödingerfeld, elektromagnetisches Feld als „klassische Felder" auffassen und dann quantisieren.

- dies ermöglicht eine gemeinsame Ebene der Beschreibung von Elektronen und Licht → „Aufhebg. des Welle-Teilchen Dualismus"
- für Schrödingerfeld heißt diese Beschrbg. „2. Quantisierg".
- Methode: Einführg. von Vernichtern, Erzeugern analog zum harmonischen Oszillator.

1) Quantisierung freier Wellenfelder

1.1) Lagrangeformalismus für Felder

man startet von den Lagrangegleichungen für Felder

die aus einem Wirkprinzip abgeleitet werden können:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Upsilon_i} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Upsilon_{i/t}} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Upsilon_{i/j}}$$

a) $\mathcal{L}$ ist die Lagrangedichte, Lagrangefunktion: $L = \int d^3r \, \mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Upsilon_i, \Upsilon_{i/t}, \Upsilon_{i/j}, t)$$

i-tes Feld $\Upsilon_i(\vec{r}, t)$ $\quad \frac{\partial}{\partial t}\Upsilon_i \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\Upsilon_i$

b) $\mathcal{L}$ wird geraten, so daß die bekannten Feldgleichungen (Maxwell, Schrödinger) durch obige Gleichg. reproduziert wird.

c) auf $\mathcal{L}$ aufbauend kann man Hamiltonformalismus für Felder aufbauen $\rightarrow$ Quantisieren

1.2. Beispiele

Freies Maxwellfeld: elektromagn. Feld im Vakuum

$$\underbrace{\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}(r,t)^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}(r,t)^2} \sim E\text{-Dichte}$$

$\Rightarrow$ Maxwellgleichg. durch Potentiale $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}$

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ → einsetzen

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_i \left\{ \varepsilon_0 \left(A_{i/t}^2 + \partial_i \phi^2 + 2 \phi_i A_{i/t} \right) - \mu_0^{-1} (\nabla \times \vec{A})_i^2 \right\}$$

für $\Upsilon_i = \{ A_i , \phi \}$ (4 Felder)

einsetzen in Lagrangegl. gibt Maxwellgl.

Def. d. Impulses: $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ in klass. Mechanik

$$\underline{\underline{\Pi_{A_j}}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{j/t}} = \varepsilon_0 A_{j/t} + \varepsilon_0 \phi_j \equiv -\varepsilon_0 E_j$$

konjugierte Variable: A_j und E_j (Felder)

— " — x_j und p_j (Teilchen 1. Quantisierung)

Schrödingerfeld: $\psi(r,t)$

Potential

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}\left(\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*\right) - \frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \psi^*_{,i} \psi_{,i} - U \psi^* \psi$$

→ Anwendg. der Lagrange-Gl. gibt die Schrödingergleichung

$$i\hbar \dot{\psi} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U\right) \psi$$

Impuls des Schrödingerfelds:

$$\Pi_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,t}} = \frac{i\hbar}{2} \psi^*$$

Offensichtlich sind ψ und ψ^* zueinander kanonisch konjugiert

1.3 Quantisierung freier Felder – Formalismus

Allgemeines Schema zur Quantisierung klassischer Felder

a) man besorge sich $\mathcal{L}(\psi_i, \psi_{i|t}, \psi_{i|j}, t)$ für Felder ψ_i

b) man besorge sich die Impulsvariable

$$\Pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{i|t}} \qquad \text{(berechnen!)}$$

c) man gehe zu Operatoren über analog $x \to \underline{x}$, $p \to \underline{p}$

$$\psi_i, \Pi_i \to \underline{\psi}_i, \underline{\Pi}_i$$

d) man führe Vertauschungsrelationen ein
(eventuell an Experiment orientieren)

oder leicht abgewandelt

$$[\underline{\psi}_i(\vec{r},t), \Pi_j(\vec{r}\,',t)]_\pm = i\hbar\, \delta_{ij}\, \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

analog zu $[x,p]$.

$$[A,B]_\pm = AB \pm BA \quad \begin{matrix} \nearrow \text{Fermionen} \\ \searrow \text{Bosonen} \end{matrix}$$

$\pm$ Quantisierung wird nach Statistik der Teilchen festgelegt.

e) man stelle den Hamiltonoperator auf

$$\mathcal{H} = \sum_i \Psi_{i/t}\,\Pi_i - \mathcal{L} = \mathcal{H}(\Psi_i, \Pi_i, \Psi_{i/j})$$

Hamiltondichte $\mathcal{H}$

$$\underline{H} = \int d^3r\, \mathcal{H}$$

analog Mechanik

$$H = \sum_i \dot{x}_i p_i - L = H(x_i, p_i)$$

f) weil $\underline{\Psi}_i$ Operatoren sind mit $\underline{\Psi}_i(\vec{r},t)$ wird der Operatorcharakter von $\underline{\Psi}_i$ getragen; $\vec{r}, t$ sind Parameter

$\underline{\Psi}_i(\vec{r},t)$ genügt der Heisenberg Bewegungsgleichung.

$$\frac{d}{dt}\underline{\Psi}_i(\vec{r},t) = \frac{i}{\hbar}\left[\underline{H}, \Psi_i(\vec{r},t)\right] + \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial t}\right)_{\text{expl}}$$

z.B. $H(\text{Feld}(t))$

explizite Zeitabhängigkeit

g) man entwickelt die Feldoperatoren $\underline{\Psi}_i(r,t)$ nach einem vollständigen System, z.B. eines „einfach" lösbaren Hamiltonoperators H_0 mit $H_0 u_\mu = \varepsilon_\mu u_\mu$

1 Teilchen H u_μ sind $u_\mu(\vec{r})$

z.B. Teilchen in Kasten

$$\underline{\Psi}_i(\vec{r},t) = \sum_{\mu} u_{\mu}(\vec{r})\, \underline{a}_{\mu}(t)$$

Operatorcharakter
und Zeitvariable

die Vertauschungsrelation von $\underline{a}$ kann aus denen von Ψ berechnet werden

$$[\underline{a}_{\mu}(t), a^{+}_{\mu'}(t)]_{\pm} = \delta_{\mu\mu'} \;, \quad [\underline{a}^{(+)}_{\mu}(t), a^{(+)}_{\mu'}(t)]_{\pm} = 0$$

zum Beweis startet man z.B. f. Schrödingerfeld

$$[\Psi(r,t), \Psi^{+}(r',t)] = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$ und setzt die Entwicklung ein:

$\sim \Pi_{\Psi}$

$\underline{\Psi}^{+} \hat{=} \Psi^{*}$ $\quad$ $\underline{\Psi} \hat{=} \Psi$

$$= \sum_{\mu,\mu'} \underbrace{[\underline{a}_{\mu}(t), \underline{a}^{+}_{\mu'}(t)]}_{\delta_{\mu\mu'}} u_{\mu}(r)\, u^{*}_{\mu'}(r') \underset{\mu=\mu'}{=} \sum_{\mu} u_{\mu}(\vec{r})\, u^{*}_{\mu}(\vec{r}\,') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

fordern

h) man stellt H_0 in den Operatoren a, a^{+} dar typischer Weise: $H_0 = \sum_\mu \varepsilon_\mu a^+_\mu a_\mu$ für jedes Feld zu überprüfen

- Offensichtlich kann man den Hamiltonian eines freien Felds durch einen Satz harmonischer Oszillatoren $\{\mu\}$ ausdrücken. Die a, a^+ können dann als Leiteroperatoren $a^+ a$ („Erzeuger" und „Vernichter") interpretiert werden, weil bei der Quantisierung d. harmonischen Oszillators nur Vertauschungsrelation $[a_\mu, a^+_{\mu'}]_\pm = \delta_{\mu\mu'}$ verwendet wurde

- Man spricht bei dem Index μ von der μ-ten Feldmode.

- In dem Oszillatorbild kann man also Teilchen / Felder also als Elementaranregung / Besetzung der Moden eines Quantenfeld $\underline{\Psi}_i$ verstehen:

$$a^+_\mu a_\mu = \underline{n}_\mu = \text{Teilchenzahloperator}$$

$\langle \underline{n}_\mu \rangle$ sagt wieviele „Quanten" in der μ-ten Mode angeregt sind

$\Longrightarrow$ einheitliche Sprache für Maxwell und Schrödingerfeld

1.4. Quantisierung d. Schrödingerfelds

$$\mathcal{L} \xrightarrow[\text{Impuls}]{} \Pi_\psi = i\hbar \frac{\psi^*}{\Sigma} \sim \psi^* \xrightarrow[\text{Vertauschg.}]{} \left[\underline{\psi}(r,t), \psi^+(\vec{r}',t)\right]_\pm = \delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

(oben)

Fermion / Boson

$$H = \int d^3r \; \underline{\psi}_s^+(r,t) \left(-\frac{\hbar^2\Delta}{2m} + u(r)\right) \underline{\psi}_s(r,t)$$

siehe oben

$$\mathcal{H} = \dot{\psi}\,\Pi_\psi - \mathcal{L}$$

Spin: ψ_s ← Schrödingerfeld mit Spin s

Modendarstellg. $H_0 = -\dfrac{\hbar^2\Delta}{2m} + u(r)$, $\underline{\psi}_s = \sum_\mu u_\mu(r)\, \underline{a}_{\mu s}(t)$

$$H = \sum_\mu \varepsilon_\mu\, \underline{a}^+_{\mu s}\, \underline{a}_{\mu s}$$ Satz v. harmonischen Oszillator

1.5. Energieeigenwertproblem

$\lambda = \mu, s$

löse $a^+_\lambda \; a_\lambda \; |n_\lambda\rangle = n_\lambda \; |n_\lambda\rangle$

um Eigenwerte u. Eigenfunktion des H zu finden

Fermionen: $[a_\lambda, a_\lambda^+]_+ = 1$

$$\underline{n}_\lambda^2 = (a_\lambda^+ a_\lambda)^2 = a_\lambda^+ \underbrace{a_\lambda a_\lambda^+}\, a_\lambda$$

$$= a_\lambda^+ (1 - a_\lambda^+ a_\lambda)\, a_\lambda$$

weil $[a_\lambda, a_\lambda]_+ = 0$

$a_\lambda^2 + a_\lambda^2 = 0$

$$= a_\lambda^+ a_\lambda - \underbrace{a_\lambda^+ a_\lambda^+}_{0} \underbrace{a_\lambda a_\lambda}_{0}$$

$$\underbrace{\underline{n}_\lambda^2 = \underline{n}_\lambda}$$

$\downarrow$

$$\underline{n}_\lambda^2 |n_\lambda\rangle = \underline{n}_\lambda |n_\lambda\rangle$$

$$\underline{n}_\lambda n_\lambda |n\rangle = n_\lambda |n_\lambda\rangle$$

$$n_\lambda^2 |n\rangle = n_\lambda |n_\lambda\rangle$$

$\rightarrow$ $n_\lambda^2 = n_\lambda$ $\rightarrow$ 2 mgl. Lösg. $\underline{\underline{n_\lambda = 0, 1}}$

Bei Fermionen findet man, daß die mgl. Besetzungszahl n_λ der Mode λ nur 0 oder 1 sein können.

Die Vertauschungsrelation (+) sichert von Anfang an die fermionische Eigenschaften.

Grundzustand ohne

Quant

zu $n_\lambda = 0, 1$ gibt $|0\rangle$, $\underbrace{|1\rangle = a_\lambda^+ |0\rangle}_{\text{ist zu zeigen}}$

Beweis

$$\underline{n}_\lambda a_\lambda^+ |0\rangle = a_\lambda^+ a_\lambda a_\lambda^+ |0\rangle = \underline{a_\lambda^+} (1 - \underline{a_\lambda^+} a_\lambda) |0\rangle$$

2 Gruppen (oben)

$$= a_\lambda^+ |0\rangle - 0$$

$$\rightarrow \quad a_\lambda^+ |0\rangle \sim |1\rangle$$

$$c\, a_\lambda^+ |0\rangle = |1\rangle$$

$$1 \overset{!}{=} c^2 \langle a_\lambda^+ 0 | a_\lambda^+ 0 \rangle =$$

$$= c^2 \langle 0 | a_\lambda a_\lambda^+ | 0 \rangle$$

$$= c^2 \Big(\underbrace{\langle 0 | 0 \rangle}_{1} - \underbrace{\langle 0 | \underline{n}_\lambda | 0 \rangle}_{\langle 0 | 0 \cdot | 0 \rangle} \Big)$$

$$\underline{c = 1}$$

Für Fermion gilt: • Quantenzahl $n_\lambda \in (0, 1)$

entsprechend dem Pauliprinzip

- Zustände: $|0\rangle$, $|1\rangle = a_\lambda^+ |0\rangle$

Interpretation: als Erzeuger eines Quants