

Bosonen: $[a_\lambda, a_\lambda^\dagger]_- = 1, [a_\lambda^{(+)}, a_\lambda^{(+)}] = 0$

mit Hilfe dieser Vertauschungsrelationen läßt sich analog zum Vorgehen bei Fermionen das Eigenwertproblem

$a_\lambda^\dagger a_\lambda |u_\lambda\rangle = u_\lambda |u_\lambda\rangle$ lösen (QM1 - Oszillator in Leiterdarstellung)

Für Bosonen gilt:

- Quantenzahl $u_\lambda \in (0, 1, 2, 3, \dots)$
 dh. u_λ „Quanten“ im Zustand $|u_\lambda\rangle$
- Zustände: $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots$

$|u_\lambda\rangle = \left(\sqrt{u_\lambda!}\right)^{-1} (a_\lambda^\dagger)^{u_\lambda} |0\rangle$

↑
 Vakuumzustand mit 0 Teilchen

Eigenschaft an QM1: Integrierte Leiteroperator

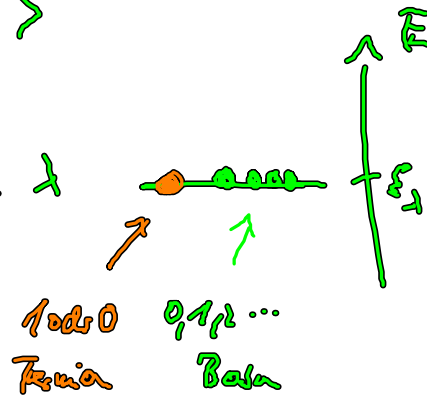
Spektrale: a_λ^\dagger erzeugt ein Quant in Mode λ
 a_λ vernichtet ein Quant in Mode λ

→ damit ist das Eigenwertproblem für 1 Mod für Fermion und Boson gelöst.

$$\underline{H} |u_\lambda\rangle = \varepsilon_\lambda u_\lambda |u_\lambda\rangle$$

⏟

Energie in Mod λ



Übergang zu viele Mode:

$$\underline{H} = \sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda}$$

↑
über

unabhängige Oszillatoren

↙ Produktzustände
 $E \hat{=} \text{Summe}$

$$|u_1, u_2, u_3, \dots\rangle = \prod_{\lambda} |u_{\lambda}\rangle = |u_1\rangle |u_2\rangle \dots$$

$$E_N = \sum_{\lambda} u_{\lambda} \varepsilon_{\lambda}$$

↑
wieviel Teilchen

$|u_1, u_2, u_3, \dots\rangle$ bildet ein vollständiges System im Raum aller Mod λ

$$|\varphi_N\rangle = \sum_{u_1} \sum_{u_2} \dots C_{u_1 u_2 \dots} |u_1, u_2, \dots\rangle$$

↑
beliebig Zustände, Teilchenzahl N

Das gilt f. System wechselwirkungsfrei Teilchen,
denn die Schrödingergl. ψ im n -ten Pot. V ,
ohne WW quantisiert.

Interpretation φ^+ :

$$|\varphi_N\rangle = \sum_{\{u_\lambda\}} C_{\{u_\lambda\}} \prod_{\lambda} \frac{(a_{\lambda}^+)^{u_\lambda}}{\sqrt{u_\lambda!}} |0\rangle$$

↑
 $|0_1\rangle |0_2\rangle |0_3\rangle \dots$

$$a_{-\lambda}^+ = \int d^3r u_{\lambda}(\vec{r}) \varphi^+(\vec{r}, t)$$

$$\text{(aus } \varphi^+(\vec{r}, t) = \sum_{-\lambda} a_{-\lambda}^+ u_{\lambda}(\vec{r}) \text{)}$$

Interpretation: Am Ort \vec{r} zu Zeit t erzeugt φ^+
ein Teilchen auf dem Vakuum

→ „Heisenberg Erzeugung (φ^+) “

Und Verkettung (?) Operatoren!

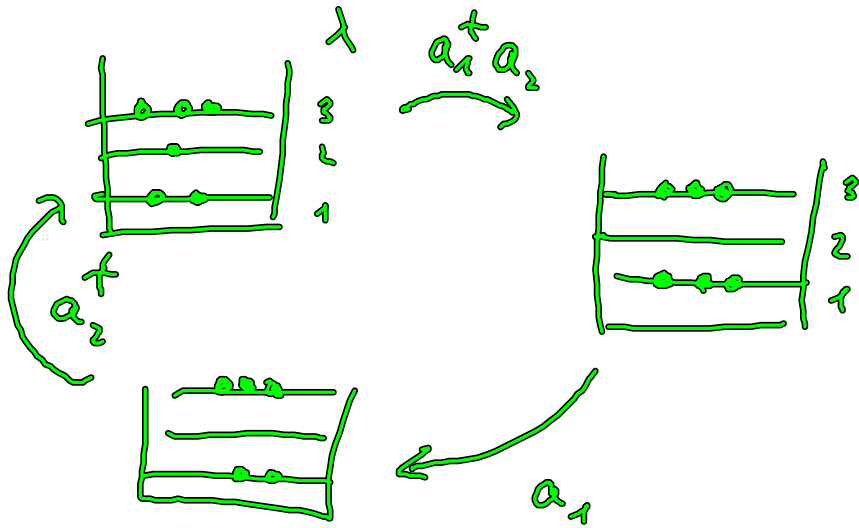
Um zwei Systeme unterschiedlicher Teilchenzahl zu verketten
braucht man

$$\begin{aligned}
 \underline{a}_{-\lambda}^\dagger |u_1, u_2 \dots \underline{u}_\lambda \dots\rangle &= \begin{cases} (u_\lambda + 1)^{1/2} |u_1, u_2 \dots \underline{u}_\lambda + 1 \dots\rangle \\ (-1)^m (1 - u_\lambda)^{1/2} |u_1, u_2 \dots \underline{1 - u}_\lambda \dots\rangle \end{cases} \\
 \underline{a}_{-\lambda} |u_1, u_2 \dots \underline{u}_\lambda \dots\rangle &= \begin{cases} \sqrt{u_\lambda} |u_1, u_2 \dots \underline{u}_\lambda - 1 \dots\rangle \\ (-1)^m \sqrt{u_\lambda} |u_1, u_2 \dots \underline{1 - u}_\lambda \dots\rangle \end{cases}
 \end{aligned}$$

↑ Vertauschung
 U M N T
 1 2 3
 B
 F

$$m = \sum_{i=1}^{l-1} u_i$$

↑ kommt bei der Herleitung der Kommutatorrelationen.



Theorie die mit
 Hilbertraum
 variabler Teilchenzahl
 arbeitet,
 ist eine Vielteilchentheorie

2. Wechselwirkendes Quarkfelds: Elektron-Elektron WW

- behandelt jetzt elektronische System (viel e^-) im Kernpotential (externes Potential U_{ext}) + die über das Maxwellfeld bzw. mittels WW (Coulomb $WW \rightarrow$ skalares Potential ϕ)
- $\vec{A} \rightarrow 0$, d.h. Strahlungskorrekturen vernachlässigen (Coulomb WW genügt, weil sich das ϕ)

2.1. Lagrangefunktion

Europäer

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - U_{\text{ken}} \psi^* \psi - q \phi_{el} \psi^* \psi + \frac{1}{2} \sum_i \epsilon_0 (\partial_i \phi_{el})^2$$

\mathcal{L}_0 : Elektron system ohne WW (eLth VL) kinetische Energie
 U_{ken} : $\psi^* \psi$: Dichte des Elektron
 $q \phi_{el}$: $\psi^* \psi$: Dichte
 $\frac{1}{2} \sum_i \epsilon_0 (\partial_i \phi_{el})^2$: ϕ_{el} : E des Potentiell. felds
 (eLth VL) kinetische Energie

$$U_{\text{ken}} = q \phi_{\text{ken}} \left(\frac{1}{r} \right) \quad \text{Elektronladg.}$$

Wissen: $\Delta \phi_{el} = - \frac{\rho_{el}}{\epsilon_0} = - \frac{q \psi^* \psi}{\epsilon_0}$

Gleichung f. skalares Potential aus Elektrodynamic oder aus \mathcal{L} ableiten

aus der Term:

$$+ \frac{\epsilon_0}{2} \sum_i (\partial_i \phi_{el})^2 = - \frac{\epsilon_0}{2} \sum_i \phi_{el} \partial_i^2 \phi_{el}$$

$L \sim \int d^3r$
 Laplacegleichung $\Delta \phi_{el}$
 partielle Integration,
 Randterme vernachlässigen $\rightarrow 0$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - q \phi_{\text{ken}} \psi^* \psi - \frac{q}{2} \psi^* \phi_{\text{el}} \psi$$

Symmetrisiert, um Probleme bei
 Antisymmetrie zu umgehen

$$\frac{q^2}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r \frac{\psi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}') \psi(\vec{r}') \psi(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

(bzgl. d. Poissongl. beschränkt)

2.2. Hamiltonian

$$\underline{H} = \int d^3r \underline{\psi}^\dagger(\vec{r}, t) \left(-\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} + U_{\text{ken}}(\vec{r}) \right) \underline{\psi}(\vec{r})$$

Ehrenfeld mit kinetischer Energie + Kernpotential

$$+ \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\underline{\psi}^\dagger(\vec{r}) \underline{\psi}^\dagger(\vec{r}') \underline{\psi}(\vec{r}') \underline{\psi}(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

berühmt
Doppel-
zähl.

Coulomb law als Ellipse best. mit sich selbst

(1) (2)

Übersetzung vorhoff v. 1. zu 2. Quantisierung.

Einteil operator: $\leftarrow \underline{O}(\vec{r}_i) \leftarrow$ Teilkoordinaten

$$H_{kin}^{(1)} = \sum_i -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i \rightarrow H_{kin}^{(2)} = \int d\tau \psi^\dagger(\vec{r}, t) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right) \psi(\vec{r}, t)$$

\uparrow als Ellipse \uparrow Quantfeld

Zwei teil operator

$$H_{Coul}^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \rightarrow H_{Coul}^{(2)} = \int d\tau \int d\tau' \frac{\psi^\dagger(\vec{r}, t) \psi^\dagger(\vec{r}', t) \psi(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$\uparrow \uparrow$
2 Koordinaten
& 2 Teil operator

$$H^{(1)} = \sum_i \underline{O}_i \rightarrow \sum_S \int d^3r \psi_S^\dagger(\vec{r}, t) O(\vec{r}) \psi_S(\vec{r}, t)$$

$$H^{(1)} = \sum_{ij} \underline{O}_{ij} \rightarrow \sum_{S, S'} \int d^3r \int d^3r' \psi_S^\dagger(\vec{r}, t) \psi_{S'}^\dagger(\vec{r}', t) O(\vec{r}, \vec{r}') \psi_{S'}(\vec{r}', t) \psi_S(\vec{r}, t)$$

Einfüg. d. Spins über Einweg. a Dirac vektor, wo
Belag die Diracinterpretation liefert

$$S = u_S = \begin{pmatrix} +1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ für zwei Spins der Paulipoly.}$$

$U_u(r)$ was das früher

Modentwickl.: $\psi_S(\vec{r}, t) = \sum_u \varphi_u(r) a_{us}(t)$
 $\psi_S^\dagger(\vec{r}, t) = \sum_u \varphi_u^*(r) a_{us}^\dagger(t)$

Einsetzen in H: $\underline{H} = \underline{H}_0 + \underline{H}_{\text{wechsel}}$

$$\underline{H}_0 = \sum_S \int d^3r \sum_{u_1 u_2} \varphi_{u_1}^*(r) \left(-\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} + U_{k_{u_2}} \right) \varphi_{u_2}(r) a_{u_1 S}^\dagger a_{u_2 S}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{E_{u_2} \varphi_{u_2}(r) \text{ bekannt}}$

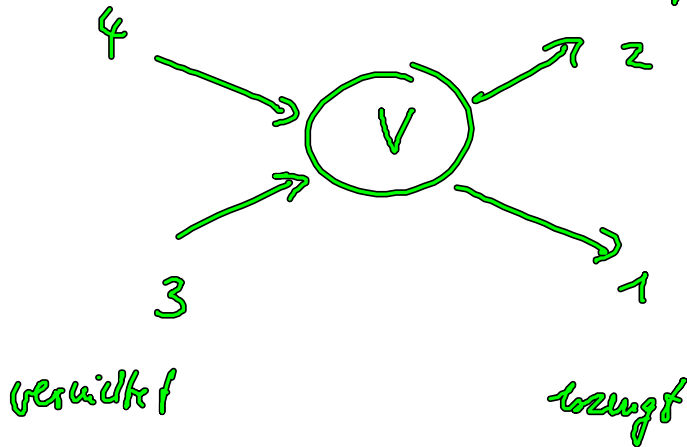
$$= \sum_S \sum_u E_u a_{us}^\dagger a_{us}$$

$$H_{\text{Coul}} = \frac{1}{2} \int d\vec{r} \int d\vec{r}' \sum_{\substack{u_1=u_4 \\ s s'}} \frac{\overbrace{\varphi_{u_1}^*(\vec{r}) \varphi_{u_2}^*(\vec{r}') \varphi_{u_3}(\vec{r}') \varphi_{u_4}(\vec{r})}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$a_{u_1 s}^\dagger a_{u_2 s'}^\dagger a_{u_3 s'} a_{u_4 s}$$

$$\equiv \frac{1}{2} V_{1234} \underbrace{a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 a_4}$$

Interpretation des Prozesses:



beschreibt Streuung von Teilchen 3, 4 in einen

Zustand 1, 2 mit Stärke V_{1234}

über alle mögl. Prozesse wird summiert.

$$\left(\langle \text{sum} \rangle \rightarrow \text{sum} \circ + \text{sum} \right)$$

Ergebnis
= „Reihe zusammen fügen“

ibu Tjuna dan anak