Die Lösung der Differentialgleichung

$$\partial_t p(t) = i\phi(t)\, p(t)$$

ergibt sich, wenn $[\phi(t_1), \phi(t_2)] = 0$ ist

Term weise zu der Summe:

$$p(t) = p(t_0) \sum_n \frac{(i)^n}{n!} \left(\int^t dt' \, \phi(t') \right)^n = p(t_0)\, e^{i \int^t dt' \phi(t')}$$

dies ist nicht der Fall, wenn $\phi(t)$ ein Operator ist, dann ist der Kommutator i.a. $\neq 0$.

3.3.5. Der Zeitordnungsoperator

braucht man, wenn ϕ ein Operator ist

n-ter Term der von Neumann reihe:

$$\int^t dt_1 \int^{t_1} dt_2 \ldots \int^{t_{i-1}} dt_i \cdots \int^{t_{n-1}} dt_n \; \phi(t_1)\phi(t_2) \cdots \phi(t_n)$$

$\underbrace{t_{e-1} \qquad t}_{}$ i.a. nicht vertauschbar

soll versucht werden alle $\int dt_e$ als $\int dt_e$ zuschreiben → Vereinfachung.

man will von Integralverschachtelung weg

$$= \int^{t} dt_1 \int^{t} dt_2 \underbrace{\theta(t_1 - t_2)}_{} \cdots \int^{t} dt_i \, \theta(t_{i-1} - t_i) \cdots \int^{t} dt_n \, \theta(t_{n-1} - t_n) \, \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n$$

wenn Grenze t_1 stellt die θ Fkt sicher, daß $t_2 < t_1$

alle Permutation

$$= \int^{t} dt_1 \int^{t} dt_2 \cdots \int^{t} dt_i \cdots \overbrace{\theta(t_1 - t_2) \cdots \theta(t_{i-1} - t_i) \cdots \theta(t_{n-1} - t_n) \, \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n}$$

wie kriegt man $\frac{1}{n!}$ um Formel in Exponentialreihe aufschreiben zu können

→ durch vertauschen der Integrationsvariablen kann man $n!$ Permutationen erzeugen: die sind alle identisch

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\text{alle Permutationen}} \int^{t} dt_1 \cdots \int^{t} dt_n \; \underline{\underline{\theta(t_1 - t_2) \cdots \theta(t_{n-1} - t_n)}} \; \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n$$

Korrekturfaktor für

Übersetzungsvorschrift

setzen „ = " = T als Zeitordnungsoperator

$t \qquad t \qquad t$

$$= \frac{1}{n!} T \int dt_1 \int dt_2 \cdots \int dt_n \; \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n \Big)$$

$\boxed{\text{Bsp}}$ für <u>2. Term</u> :

1. Permutation

$$T \phi_1 \phi_2 = \theta(t_1 - t_2)\, \phi(t_1)\, \phi(t_2) \qquad t_2 < t_1$$

$$+ \theta(t_2 - t_1)\, \phi(t_2)\, \phi(t_1) \qquad t_1 < t_2$$

2. Permutation

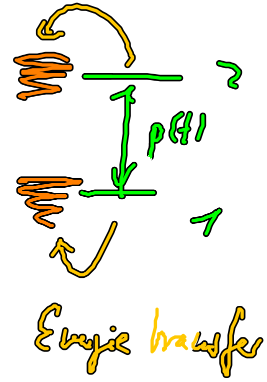
man sagt, T ordnet die Zeitfolge von $\phi(t)$ von rechts nach links mit aufsteigenden Zeiten

$$\rho(t) = \rho(t_0)\, T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \left(\int^{t} dt' \, \phi(t') \right)^n$$

$$= \rho(t_0)\, \underbrace{T \, e^{i \int^{t} dt' \, \phi(t')}}_{\text{Zeitgeordnete Exponentialfunktion}}$$

Feynman hat Regeln für Rechnen mit zeitgeordneten Größen angegeben (analog Zahlen rechnen)

Ziel: exakte Lösung des Modells:



$$\langle p(t)\rangle = \mathrm{Sp}\left(p(t_0)\, T\, e^{\,i\int_{t_0}^{t} dt'\, \phi(t')}\, \rho(t_0)\right)$$

Erwartungswert der Dipolschwingung

statistischer Operator am Beginn zur Zeit t_0

$$= \mathrm{Sp}_{el}\underbrace{\left(p(t_0)\, \rho_{el}(t_0)\right)}_{p_0\ -\ \text{Anfangswert}}\ \mathrm{Sp}\left(T\, e^{\,i\int_{t_0}^{t} dt'\, \phi(t')}\, \rho_{ph}(t_0)\right)$$

Annahme: vor t_0 gilt Born Oppenheimer

Näherung: $\rho(t_0) = \rho_{el}(t_0)\, \rho_{ph}(t_0)$

im Gleichgewicht vor der Dipolschwingung: $\frac{1}{Z}\, e^{-\frac{H_{ph}}{kT}}$

$$= \rho_0 \; \mathrm{sp}_{ph}\left(\sum_n \frac{i^n}{n!} \int^t dt_1 \cdots \int^t dt_n \; T\,\phi(t_1) \cdots \phi(t_n)\, \rho_{ph}\right)$$

gesucht $\quad \mathrm{sp}_{ph}\left(T\,\phi(t_1) \cdots \phi(t_n)\right) = \,?$

die Berechng. dieser Größe ist das Problem:

löst das Wicktheorem.

3.3.6. Das Wicktheorem

Ziel: Zerlegg. von n-Punktfunktion $\langle T\phi_1 \cdots \phi_n \rangle$

in kleine überschaubare Bausteine: $\langle T\phi_1 \phi_2 \rangle$

allerdings: geht nur im WW Bild, hier

$$b_\alpha^{(+)}(t) = \underbrace{b_\alpha^{(+)}(t_0)}_{\text{Anfangswert}} \; \underbrace{e^{\stackrel{(+)}{-} i\omega_\alpha t}}_{\text{freie Zeitabhängigkeit v. WW Bild}} \qquad \text{(Bosonannahme)}$$

∃ Wicktheorem f. Bosonen, Fermionen + Mischg. von beiden

a) betrachten den zukünftig fundamentalen f. die n-Punktfunktionen:

$$D(t_1,t_2) \equiv \langle T\,\phi(t_1)\,\phi(t_2)\rangle$$

"Phonon-propagator, Greens funktion"

$$= \theta(t_1-t_2)\langle\phi(t_1)\phi(t_2)\rangle + \theta(t_2-t_1)\langle\phi(t_2)\phi(t_1)\rangle$$

$$= \theta(t_1-t_2)\,\mathrm{sp}_{ph}\Big(\rho_{ph}\sum_{\alpha_1\alpha_2} g_{\alpha_1} g_{\alpha_2} \underbrace{\left(b_{\alpha_1}(t_1)+b^+_{\alpha_1}(t_1)\right)}_{\hat{=}\,\phi_1}\left(b_{\alpha_2}(t_2)+b^+_{\alpha_2}(t_2)\right)\Big)$$

$$+\ (t_1 \leftrightarrow t_2)$$

$$\mathrm{sp}_{ph}(\,\cdot\,) \equiv \sum_n \langle n|\ \cdot\ |n\rangle$$

anwenden: Zustand am Ende muss gleich sein, sonst $=0$, weil $\langle n|n'\rangle = 0$ f. $n\neq n'$.

vollständiges System von Phonon besetzungszahl zuständen

$$= \theta(t_1-t_2)\sum_{\alpha_1\alpha_2} g_{\alpha_1} g_{\alpha_2}\,\mathrm{sp}\Big(\big(b_{\alpha_1}(t_1)\,b^+_{\alpha_2}(t_2) + b^+_{\alpha_1}(t_1)\,b_{\alpha_2}(t_2)\big)\frac{e^{-\beta H_{ph}}}{Z}\Big)$$

$$+(t_1\leftrightarrow t_2)$$

: $\delta_{\alpha_1\alpha_2}$ stellt $\langle n|n\rangle$ sicher!

$$= \theta(t_1 - t_2) \sum_\alpha g_\alpha^2 \left\{ (1+n_\alpha)\, e^{-i\omega_\alpha (t_1 - t_2)} + n_\alpha\, e^{i\omega_\alpha (t_1 - t_2)} \right\}$$
$$+ (t_1 \leftrightarrow t_2)$$

n_α : Phononzahl (Boseverteilung)
enthält $\beta = \frac{1}{kT}$ als Parameter der Umgebg.

$$D(t_1, t_2) = \sum_\alpha g_\alpha^2 \left\{ (1+n_\alpha)\, e^{-i\omega_\alpha |t_1 - t_2|} + n_\alpha\, e^{+i\omega_\alpha |t_1 - t_2|} \right\}$$

Phononpropagator $t_2 \to t_1$
man erkennt Phononabsorption / emission
(spontan Emission : 1 mit $n_\alpha = 0$)

b) Wie kann man $\langle T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle$ in $D(t_1 t_2) D(t_3 t_4)$ etc zerlegen?

<u>1. Wicktheorem</u> (Boson) : Zeitgeordnete Produkte von Operatoren im WW-Bild werden in <u>alle</u> Kombinationen von je 2 Operatoren in $D(t_1, t_2)$ zerlegt:

$$\underbrace{D(t_1 t_2)}$$

$$\langle T\,\phi_1\,\phi_2\,\phi_3\,\phi_4 \cdots \rangle = \langle T\,\phi_1\,\phi_2\rangle\langle T\,\phi_3\,\phi_4\rangle \cdots$$

gerade Anzahl

(∀ alle ungeraden $= 0$)

alle mögl. Kombination als Paare

$$= \sum_{\text{alle mögl. Kombination}} \prod_{a,b} \langle T\,\phi_a\,\phi_b\rangle$$

<u>klar machen d. Wick theorems f. Bsp. $n=4$:</u>

$$\langle T\,\phi_1\,\phi_2\,\phi_3\,\phi_4\rangle = ?$$

Starten mit $\langle T\, b^{(+)}_{\alpha_1}\,\phi_2\,\phi_3\,\phi_4\rangle =$

später dann ϕ_1 wieder zusammenbauen

$$= \langle T\, b^{(+)}_{\alpha_1}\,\phi_2\,\phi_3\,\phi_4\rangle - \langle T\,\phi_2\, b^{(+)}_{\alpha_1}\,\phi_3\,\phi_4\rangle$$

$= 0$

$$+ \langle T\,\phi_2\, b^{(+)}_{\alpha_1}\,\phi_3\,\phi_4\rangle - \langle T\,\phi_2\,\phi_3\, b^{(+)}_{\alpha_1}\,\phi_4\rangle$$

$= 0$

$$+ \langle T\,\phi_2\,\phi_3\, b^{+}_{\alpha_1}\,\phi_4\rangle - \langle T\,\phi_2\,\phi_3\,\phi_4\, b^{(+)}_{\alpha}\rangle$$

$= 0$

$$+ \langle T \phi_2 \phi_3 \phi_4 b_\alpha^{(+)} \rangle$$

Zahl, daher aus dem $\langle\ \rangle$ rausnehmen

$$= \Big\{ \langle T \phi_3 \phi_4 \rangle [b_{\alpha_1}^{(+)}, \phi_2] \qquad \text{(1. Zeile)}$$

$$+ \langle T \phi_2 \phi_4 \rangle [b_{\alpha_1}^{(+)}, \phi_3] \qquad \text{(2. Zeile)}$$

$$+ \langle T \phi_2 \phi_3 \rangle [b_{\alpha_1}^{+} \phi_4] \qquad \text{(3. Zeile)}$$

$$+ Sp_{ph} (T \phi_2 \phi_3 \phi_4 b_\alpha^{(+)} \rho_{ph}) \Big\}$$

„wär schön", denn da ist die rechte Seite!

Phononenergie

<u>Formel</u>: $b_\alpha^{(+)} \rho_{ph} = \rho_{ph} b_\alpha^{(+)} e^{\pm \varepsilon_\alpha \beta}$

vertauschen, denn zyklische Invarianz der Spur nutzen

letzter Term: $sp (T b_{\alpha_1}^{(+)} \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rho_{ph}) e^{(\pm) \varepsilon_\alpha \beta}$

$\Longrightarrow$

$$\langle T\, b^{+}_{\alpha_1}\, \phi_2\, \phi_3\, \phi_4 \rangle =$$

$$\frac{-1}{e^{+\beta\varepsilon_\alpha}-1} \Big(D(t_3,t_4)\, T[b^{+}_{\alpha_1}, \phi_2] + \dots \quad \text{zweiter Zeile} \Big)$$

$$[b^{(+)}_{\alpha_1}, \phi_2] = \Big(\underset{\substack{\uparrow \\ t_1}}{b^{(+)}_{\alpha_1}} \sum_{\alpha_2} g_\alpha \underset{\substack{\uparrow \\ t_2}}{(b^{+}_{\alpha_2} + b_{\alpha_2})} - \text{vertauscht} \Big)$$

$$= \overset{(-)}{+}\, g_{\alpha_1}\, e^{\overset{(+)}{-}\, i\omega_{\alpha_1}(t_1-t_2)}$$

aufsammeln f. ϕ_1:

$$+ D(t_1,t_4)\, D(t_2,t_3)$$

$$+ D(t_1,t_3)\, D(t_2,t_4)$$

$$\langle T\, \phi_1\, \phi_2\, \phi_3\, \phi_4 \rangle = \Big(D(t_1,t_2) \cdot D(t_3,t_4) + \dots \Big)$$

am Bsp. das Wicktheorem klargemacht.