4.6. Photonenstatistik und Zustände des Strahlungsfeldes

4.6.1. Feld und Photonzahl als charakteristische Größen

Feld: $E(\vec{r},t) = i \sum_{k\lambda} g_k \vec{e}_{k\lambda} \xi_{k\lambda}(\vec{r})\, c_{k\lambda}(t) + h.a.$

$\rightarrow \langle c_{\lambda k} \rangle = ?$

Photonzahl: $c^+_{\lambda k}(t)\, c_{\lambda k}(t) \longrightarrow \langle c^+_{\lambda k} c_{\lambda k} \rangle = ?$

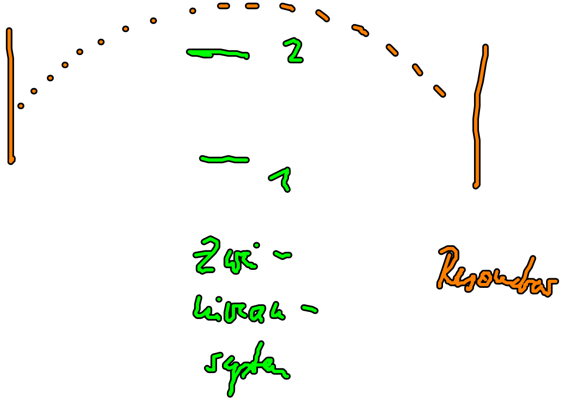
Mittelwert und Schwankung (Statistik) von Photonzahlen kann in Photodetektoren (mit Einschränkungen) gemessen werden.

Photonzahl wird typisch weiter unterteilt:

$$\langle c^+_{\lambda k} c_{\lambda k} \rangle = \underbrace{\langle c^+_{\lambda k} \rangle \langle c_{\lambda k} \rangle}_{\substack{\text{kohärente Felder,} \\ \text{sind die Felder} \\ \text{der klassischen ED} \\ \langle E \rangle \sim \langle c^{(+)}_{\lambda k} \rangle}} + \underbrace{\left(\langle c^+_{\lambda k} c_{\lambda k} \rangle - \langle c^+_{\lambda k} \rangle \langle c_{\lambda k} \rangle \right)}_{\substack{\text{Korrekturen zu den} \\ \text{klassischen Feldern der ED}}}$$

hier sind im allgemeinen die nichtklassischen Eigenschaften enthalten

Billig modell



<u>1 Licht mode:</u>

$c_{\lambda k} \to c$, $\tilde{g}_{12}^{k\lambda} \to \tilde{g}_{12}$

$\omega_{\lambda k} \to \omega$, $\xi_{\lambda k} \to \xi(\vec{r})$

$\vec{e}_{k\lambda} \to \vec{e}$

<u>Wie wird Licht erzeugt ?</u>

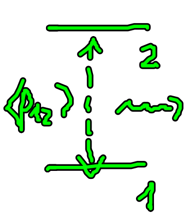
$$\dot{c}^{+} = i\omega c^{+} + i\tilde{g}_{21}\, a_2^{+} a_1$$

$$\dot{c} = -i\omega c + i\tilde{g}_{12}\, a_1^{+} a_2$$

Bewegungsgleichungen f. Licht $c^{(+)}$ aus Abschnitt 4.3.

$a_1^{+} a_2 = p_{12}$ Übergangsamplitude ~ Dipoldichte $\langle p_{12} \rangle$ (Antenne oder Atom)

(i) $\langle c^{(+)} \rangle$ wird getrieben durch ein endlichen Erwartungswert von $\langle p_{12} \rangle$

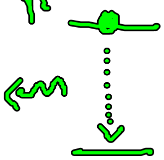


$\langle p_{12} \rangle \neq 0$, ein Mgl. einen Felderwartungswert $\langle E \rangle \neq 0$ zu erzeugen ist das Erschaffen einer klassischen Dipoldichte.

$\langle E \rangle \neq 0$

(ii) wenn $\langle p_{12} \rangle = 0$, dann gibt es noch die <u>spontane</u> Emission

$f_2 \neq 0$ zur Lichterzeugung.

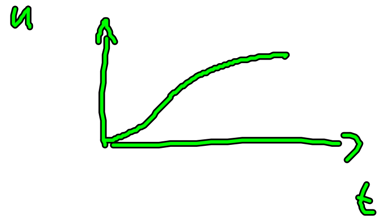


$$\langle E \rangle = 0 \quad \text{(später)}$$

$\langle p_{12} \rangle = 0$

$$\partial_t n = \Gamma_{rad} f_2 \quad (4.4.)$$

$f_2 = \langle a_2^\dagger a_2 \rangle$



4.6.2. Reine Zustände

(ohne Umgebung, kleine Temperatur)

4.6.2.1 Kohärente Zustände (Glauberzustände)

- Erzeugung über klassische Dipoldichte $\rightarrow \langle E \rangle \neq 0$
- suche Zustand mit $\langle E \rangle \neq 0$ im freien Raum

$$\langle E \rangle \neq 0 \rightarrow \langle c \rangle \neq 0$$

freier Raum

$$\langle \alpha | \underbrace{c(t) | \alpha \rangle}_{} = \langle \alpha | c\, e^{-i\omega t} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \underbrace{c | \alpha \rangle}_{} e^{-i\omega t}$$

suche die Eigenzustände von c, damit $\langle \alpha | c(t) | \alpha \rangle \neq 0$ ist

löse dieses Eigenwertproblem

$|\alpha\rangle$ ist ein Eigenzustand v. c, d.h. $c|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$

(α i.a. komplex) und $|\alpha\rangle$ läßt sich so darstellen:

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle}_{\text{Darstellung über Photonzahlzuständen}}$$

$$\left(c^+ c |n\rangle = n|n\rangle \right)$$

<u>Beweis</u>:

$$c|\alpha\rangle \overset{!}{=} \alpha|\alpha\rangle$$

$$c|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \underbrace{c|n\rangle}_{\sqrt{n}\,|n-1\rangle}$$

wissen: $c|0\rangle = 0$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n}\, |n-1\rangle$$

1

Index verschieb. in Summe $\qquad \sqrt{(n-1)!}$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{n!}} |n\rangle = \alpha |\alpha\rangle$$

<u>Bemerkungen</u>:

a) $|\alpha\rangle$ wird kohärenter Zustand genannt und ist Eigenzustand zu c.

b) $|\alpha\rangle$ ist normiert $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2} \underbrace{\sum_{n n'} \frac{\alpha^{*n'} \alpha^{n}}{\sqrt{n'!}\sqrt{n!}}} \qquad \langle n|n'\rangle \rightarrow \delta_{nn'}$$

$$= e^{-|\alpha|^2} e^{|\alpha|^2} = 1$$

c) $|\alpha\rangle$ für verschiedene α sind <u>nicht</u> orthogonal:

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2}$$

d) es gilt : $\langle\alpha| c^+ = \langle\alpha|\alpha^*$

e) andere Darstellg.:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{(\alpha c^+)^n}{n!} |0\rangle$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha c^+} |0\rangle$$

$$|\alpha\rangle = e^{(\alpha c^+ - \alpha^* c)} |0\rangle$$

symmetrische Formulierg. in c^+, c

$\alpha c^+ - \alpha^* c$ wird Verschiebeoperator $D(\alpha)$ genannt

sieht analog zu H für Feld-klassischer Dipol WW aus.

<u>Beweis</u>: $$e^{\hat{c}} e^{\hat{d}} = e^{\hat{c}+\hat{d}} e^{+\frac{1}{2}[\hat{c},\hat{d}]}$$

Zahl

+ Verwendg. von

$$c|0\rangle = 0$$

g) kohärente Zustände werden typischerweise im Laser oberhalb der Laserschwelle erzeugt. → in klass. ED wird mit „Laserlicht" gerechnet.

Charakterisierung von $|\alpha\rangle$:

(i) Photonenverteilung / -statistik

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \qquad |c_n|^2 = \rho_n$$

ρ_n ist die Wahrscheinlichkeit im Zustand n Photonen vorzufinden

$$|c_n|^2 = \rho_n = \frac{e^{-|\alpha|^2}}{n!} |\alpha|^{2n}$$

Was ist α? wir wollen den von grafischen Darstellung an Meßgröße koppeln.

(ii) Photonenzahl und Schwankung

$$\langle n \rangle = \langle \alpha | c^\dagger c | \alpha \rangle = |\alpha|^2 = \text{Photonenzahl}$$

$\alpha^* \qquad \alpha$

mittlere Schwankung $\quad \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 \equiv \Delta n^2$

$$\langle n^2 \rangle = \langle \alpha | c^+ c \, c^+ c | \alpha \rangle = \langle \alpha | c^+ (1 + c^+ c) c | \alpha \rangle$$

$$= |\alpha|^2 + |\alpha|^4 = \langle n \rangle + \langle n \rangle^2$$

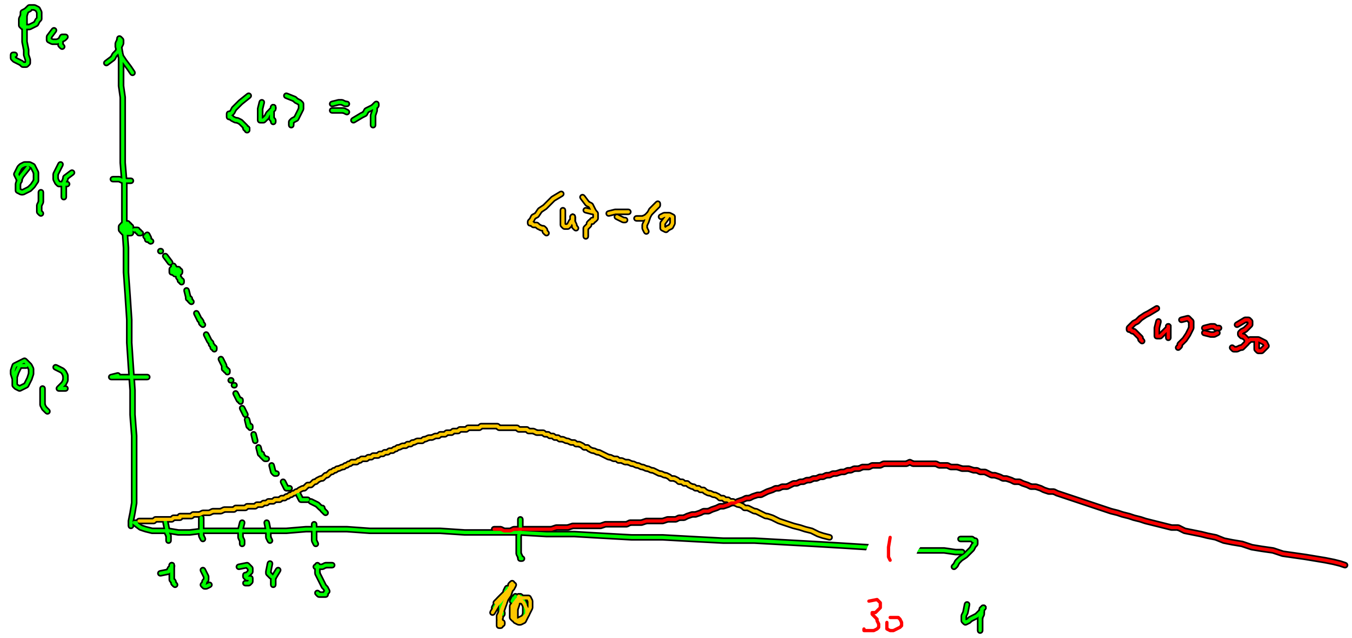
mittlere Schwankung:

$\Delta n^2 = \langle n \rangle$ ist die mittlere Photonenzahl

$$\boxed{p_n = \frac{1}{n!} \langle n \rangle^n e^{-\langle n \rangle} \qquad \text{Poisson verteilung}}$$

Wahrscheinlichkeit n Photonen zu finden,

wenn im Mittel $\langle n \rangle$ Photonen gefunden werden



Die relative Schwankung d.h. $\dfrac{\sqrt{\Delta n^2}}{\langle n \rangle} = \dfrac{\sqrt{\langle n \rangle}}{\langle n \rangle} = \dfrac{1}{\sqrt{\langle n \rangle}} \to 0$

(wie groß ist Fehler in Bezug um den Mittelwert herum?),

verschwindet für große mittlere Photonenzahlen

Es macht nur Sinn den Mittelwert f. große $\langle n \rangle$ also hohe Intensitäten anzugeben.

(iii) Feld und Feldfluktuation

$$\langle E \rangle = \langle \alpha | \, i g_k \vec{e} \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} c(t) + \text{h.a.} \, | \alpha \rangle$$

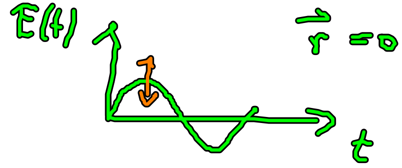
$$= i \alpha g_k \vec{e} \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-i\omega t} + \text{h.a.}$$

und $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$

$$\langle E \rangle = -g_k |\alpha| \, 2 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \theta)$$

Die Lösung stellt nun eine Welle dar. (ED!)

ansehen der Fluktuationen :



$$\langle E^2\rangle\big|_{\vec{r}=0} = |g_k|^2 \langle\alpha|\left(i c\, e^{-i\omega t} - i c^+ e^{i\omega t}\right)^2|\alpha\rangle$$

$$= |g_k|^2 \langle\alpha|\Big(\underbrace{c c^+ + c^+ c}_{1+2c^+c} - c^2 e^{-i2\omega t} - c^{+2} e^{i2\omega t}\Big)|\alpha\rangle \qquad \alpha^2 = |\alpha|^2 e^{i2\theta}$$

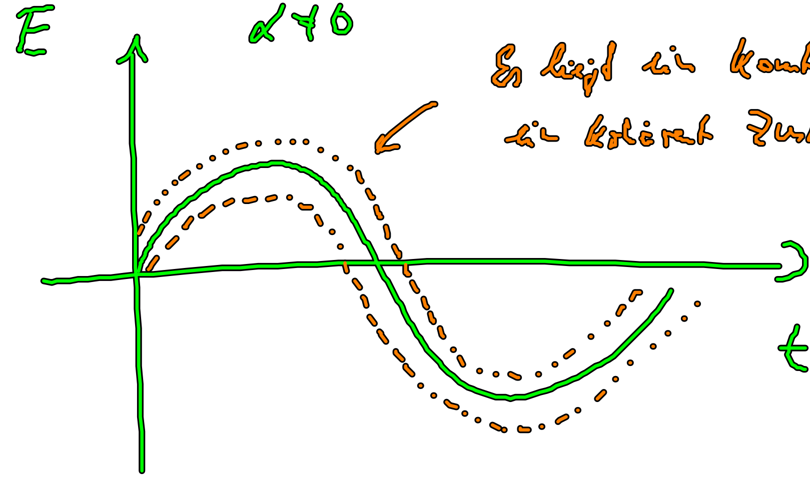
$$= |g_k|^2 \left\{ 2|\alpha|^2 + 1 - 2|\alpha|^2 \cos\big(2(\omega t+\theta)\big)\right\}$$

$$\langle E\rangle^2\big|_{r=0} = |g_k|^2\, |\alpha|^2\, 4 \sin^2(\omega t+\theta)$$

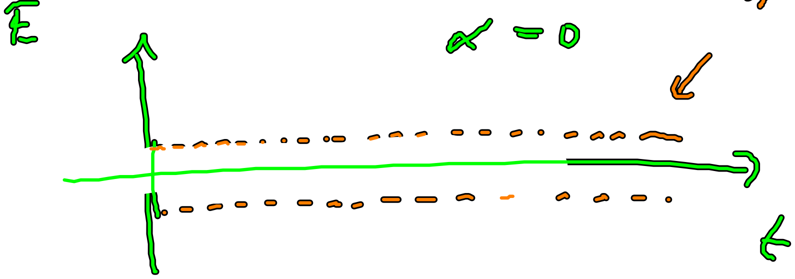
$$= |g_k|^2\, 4|\alpha|^2 \left(\frac{1-\cos\big(2(\omega t+\theta)\big)}{2}\right)$$

$$\Delta E^2 = \langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2$$

$$= |g_k|^2 = \text{konstant}$$



Es liegt ein Konst. Schwankung vor für ein kohärent Zustand



es liegt auch ein Konst. Schwankung im Vakuum Zustand vor