Bemerkungen

a) über $\underline{U}_{ww}(t,t')$ zwei Größen definiert

Streuamplitude / Vakuumamplitude

$$\lim_{t,t' \to \pm\infty} \langle \phi_i | \underline{U}_{ww}(t,t') | \phi_f \rangle \quad / \quad R(t,t') = \langle \phi_0 | \underline{U}_{ww}(t,t') | \phi_0 \rangle$$

$$\underline{U}_{ww}(t,t') = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{t'}^{t} dt_1 \cdots \int_{t'}^{t} \langle T\, \underline{H}_{ww}(t_1) \cdots \underline{H}_{ww}(t_n) \rangle$$

b) Operatoren in diesen Formeln

$$\underline{U}_{ww} \left(\underline{a}^+(t), \underline{a}(t), \underline{b}(t) \right)$$

WW-Bild   WW-Bild, Strich wird mitgeschrieben

Wechsel zw. Formulierg. mögl. wenn man $\langle \Psi(t) | O | \Psi(t) \rangle$

unverändert läßt

Schrödinger-Wellenfkt

$$\langle \Psi(t) | O | \Psi(t) \rangle = \langle \Psi' | O' | \Psi' \rangle$$

transformierte Größe

gilt, wenn: $|\Psi(t)\rangle \to A(t) |\Psi(t)\rangle = |\Psi'\rangle$

Operator

$$O \to A\,O\,A^{+} = O'$$

wenn $A^{+} = A^{-1}$ (unitär)

Wechselwirkungsbild $A = e^{i\frac{H_0}{\hbar}t}$ gewählt

gut unter Kontrolle

$$(H = H_0 + H_{WW})$$

$$|\underline{\Psi}(t)\rangle = e^{i\frac{H_0}{\hbar}t}\,|\Psi(t)\rangle$$

WW-Bild

Schr.-Bild

$$\underline{O}(t) = e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}}\, O\, e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}}$$

Ziel ist Vereinfachung wenn man statt der „alten" Schrödingergl. neue Gleichung (einfacher?) aufschreibt:

Zeit (gibt es in Schrödingergl. nicht)

WW-Bild:

$$i\hbar\,|\underline{\Psi}(t)\rangle = \underline{H}_{WW}(t)\,|\underline{\Psi}(t)\rangle$$

ww Wechselwirkung

diese Vereinfachung ist „erkauft" durch Komplizierung der Operatoren

$$\underbrace{i\hbar\,\dot{\underline{O}} = [H_0, \underline{O}]}$$

$$\underline{a}_n^{(+)}(t) = e^{i\frac{H_0}{\hbar}t}\, a_n\, e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}} = e^{\overset{(+)}{-} i\frac{E_n}{\hbar}t}\, a_n^{(+)}$$

führt auf eine etwas einfachere Schrödingergl.

mit ein Ansatz:

$$|\underline{\Psi}(t)\rangle = \underline{U}_{WW}(t,t')\,|\Psi(t')\rangle$$

dieser Ansatz führt auf die Rich. für $U_{WW}(t,t')$. (letzte VL)

c) Mittelwerte in dieser Formeln

$$\langle\,\cdot\,\rangle \;\to\; \langle\phi_0|\;\cdot\;|\phi_0\rangle \qquad \text{Beweis dieser Formel später}$$

$$\to\; \mathrm{Sp}(\,\cdot\,\varrho\,)$$

(mit Wärmebad)

d) gesucht sind $\langle T\; a_1^+(t)\,a_2(t)\,b\; a^+ a\, a\; c\rangle$

(denn $\sim \langle T\; \underline{H}_{WW} \cdots\rangle$)

z.B. Coulomb WW: $\frac{1}{2}\sum_{nlmk} V_{nmkl}\; a_n^+(t)\,a_m^+(t)\,a_k(t)\,a_l(t)$

1.4.1. Wick Theorem

Erwartungswerte zeitgeordnete Operatorprodukte zerschlagen

(in kleinere Bausteine)

<u>Baustein 1</u> $$D(t_1,t_2) = \sum_\alpha g_\alpha^2 \left\{ (1+n_\alpha)\, e^{-i\omega_\alpha |t_1-t_2|} + n_\alpha\, e^{+i\omega_\alpha |t_1-t_2|} \right\}$$

<u>Phononpropagator</u> (vor 2 Monaten)

α - Phononmode

n_α - Boseverteilung (T)

<u>Wicktheorem 1</u>: Zeitgeordnete Produkte v. vieler Operatoren im WW Bild wird in zeitgeordnete Produkte v. 2 Operatoren zerlegt

$$\langle T\, \phi_1 \phi_2 \phi_3 \cdots \rangle = \sum_{\substack{\text{alle mögl.}\\ \text{Kombination}}} \prod_{(a,b)} D(t_a, t_b)$$

$$\phi_1 = \sum_{\alpha_1} \left(b^+_{\alpha_1}(t_1) + b_{\alpha_1}(t_1) \right) g_{\alpha_1}$$

z.B. $\langle T\, \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle$

$$= \underbrace{\langle T\, \phi_1 \phi_2 \rangle}_{D(t_1,t_2)} \underbrace{\langle T\, \phi_3 \phi_4 \rangle}_{D(t_3,t_4)} + \langle T\, \phi_1 \phi_3 \rangle \langle T\, \phi_2 \phi_4 \rangle$$

$$+ \langle T \phi_1 \phi_4 \rangle \cdot \langle T \phi_2 \phi_3 \rangle$$

<u>Baustein 2</u> $\quad G(t_1 t_2) = \langle T a_1^+ a_2 \rangle = \delta_{12} f_1^F e^{i \frac{\varepsilon_1}{\hbar}(t_1 - t_2)}$

$a^+_{n_1}(t_1)$

$1 \hat{=}$ Elektron mode

$f^F(T)$ Fermifunktion mit Energie ε_1

<u>2. Wicktheorem</u>: Zeitgeordnete Produkt v. El-Operatoren im WW Bild:

wird in 2er Produkte zerlegt:

$$\langle T a_1^+ a_2 a_3^+ a_4 \rangle =$$

$$\langle T a_1^+ a_2 \rangle \langle T a_3^+ a_4 \rangle - \langle T a_1^+ a_3^+ \rangle \langle T a_2 a_4 \rangle$$

Statt + wie bei Bosonen

bekommt man VZ mit Anzahl ν

der nötigen gedanklichen Vertauschg. gilt

$(-1)^\nu$ = Vorzeichen

$$+ \langle T a_1^+ a_4 \rangle \underbrace{\langle T a_2 a_3^+ \rangle}$$

$(-1)^2$

$$G^+(t_2,t_3) = \delta_{23}\,(1-f_2^F)\,e^{-i\varepsilon_2(t_2-t_3)}$$

3. Wick theorem: verschied. Operatoren unter ein $\langle\ \ \rangle$

$$\langle T\, a^+ b^+ a\, b\rangle = \langle T a^+ a\rangle \langle T b^+ b\rangle$$

faktorisiert   2. Wick   1. Wick

1.4.2. Diagrammdarstellg. d. Coulomb-WW

brauch $\underline{U}_{WW}(t,t') = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(t,t')$

$$W_n = \frac{1}{n!}\frac{1}{(i\hbar)^n}\int_{t'}^{t} dt_1 \cdots \int_{t'}^{t} dt_n \,\langle T\, V_1 \cdots V_i \cdots V_n\rangle$$

$$V_i = \sum_{n_i m_i l_i k_i} V_{n_i m_i l_i k_i}\, a^+_{n_i}(t_i)\, a^+_{m_i}(t_i)\, a_{k_i}(t_i)\, a_{l_i}(t_i)$$

man kann eine Ordng hinschreiben und und Wick 2 zerlegen:

$$\langle T\, a_1^+ a_1^+ a_1 a_1\; a_2^+ a_2^+ a_2 a_2\; a_3^+ a_3^+ a_3 a_3\rangle \qquad \text{3. Ordng}$$

$\longrightarrow \sum_{\substack{\text{alle} \\ \text{Kontr.}}} G\, G\, G\, G \cdots$

Wie viele Faktoren?

zunächst ($\langle T a^+ a^+ \rangle = 0$

$\langle T a a \rangle = 0$)

Anzahl d. G's in der n-ten Ordnung: 2n Erzeuger, 2n Vernichter

jedes a^+ kann mit 2n Vernichter kombinieren

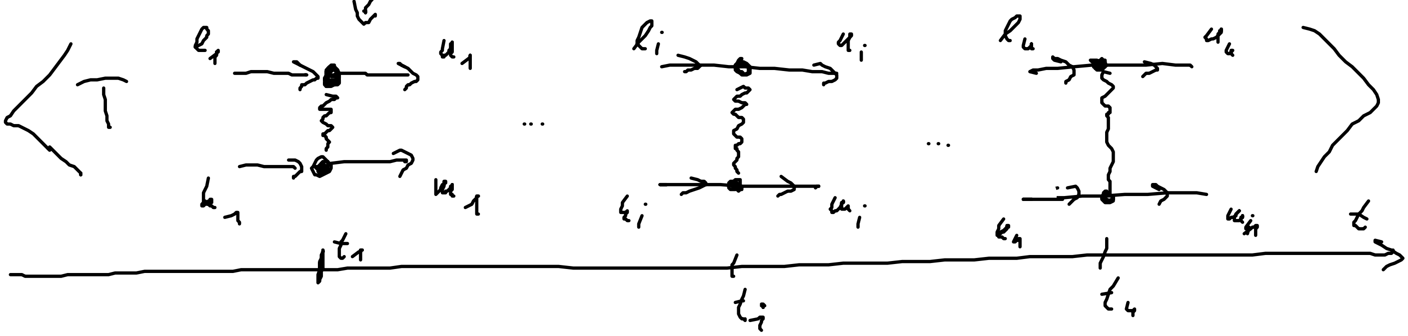
der nächste Erzeuger kann nur mit (2n-1) Vernichter kombinieren.

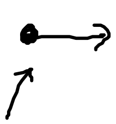
$$2n(2n-1)(2n-2)\cdots = \underline{\underline{(2n)!}}$$

Jeder Summand enthält (2n)! Elektronpropagatoren G bzw G^+

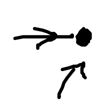
man verwendet graphische Darstellung:

$$\frac{1}{n!}\frac{1}{(i\hbar)^n}\frac{1}{2^n}\left\langle T\, \underbrace{V_{n_1 m_1 l_1 k_1}\, a^+_{n_1} a^+_{m_1} a_{k_1} a_{l_1}(t_1)}\ \cdots\ (t_i)\ \cdots\ (t_n)\right\rangle$$

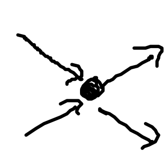


Erzeuger 

Vertex

Vernichter 

Vertex

( ist eine andere Darstellung) an Vertex findet WW statt

un $\hat{=}$ Vorfaktoren + Integralen

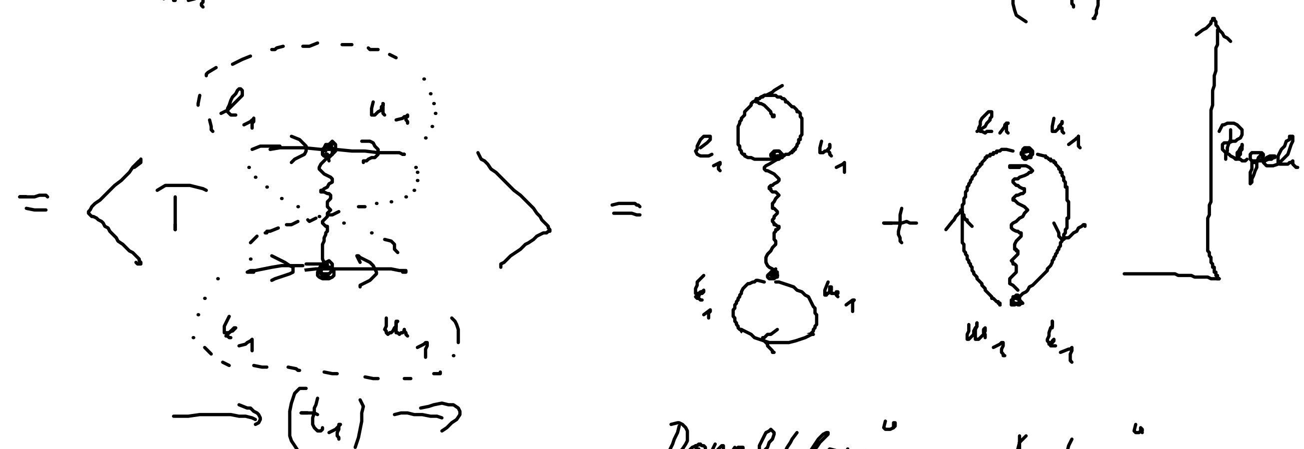
man möchte jetzt die G's kombinieren:

<u>Beispiel</u>:

$$\frac{1}{1!\, i\hbar}\langle T\, V(t_1)\rangle = \frac{1}{i\hbar}\,\frac{1}{2}\sum_{\substack{n_1 m_1\\ l_1 k_1}} V_{n_1 m_1 l_1 k_1}\langle T\, a^+_{n_1}(t_1)\, a^+_{m_1}(t_1)\, a_{k_1}(t_1)\, a_{l_1}(t_1)\rangle$$

1. Term $(n=1)$

$$= \frac{1}{2i\hbar}\sum_{\substack{n_1 m_1\\ l_1 k_1}} V_{n_1 m_1 l_1 k_1}\Big(G_{n_1 l_1}(\overset{\overset{0}{\shortparallel}}{t_1-t_1})\, G_{m_1 k_1}(\overset{\overset{0}{\shortparallel}}{t_1-t_1}) \underset{(-1)^3}{-} G_{n_1 k_1}(0)\, G_{m_1 l_1}(0)\Big)$$



„Doppelblase" „Auster"

<u>Ziel</u>: die Reihe in Bilder übersetzen,

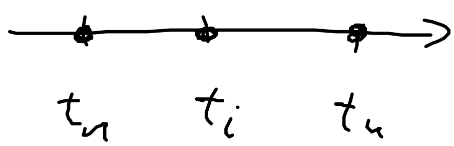
durch Intuition Näherung machen oder

<u>Teile</u> der Reihe aufzusummieren (nicht störungstheoretisch)

dann aber zurück übersetzen!

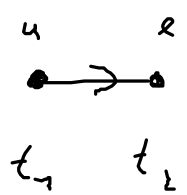
Feynman Regeln f. diagrammatisches Aufschreiben der Vakuumamplitude

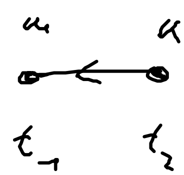
1.) Zeitachse läuft v. links nach rechts



bezieht sich auf Zeitpunkte (Vertex, Vertices)

2.) zwischen den Vertizes laufen immer Pfeile die „G" bzw. „G^+" repräsentieren

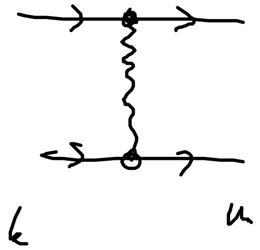
$G(t_1-t_2)$ 

, G^+ 

$G(0)$ 

3.) Wechselwirkung z. Zeit wird mit $\wr$ dargestellt

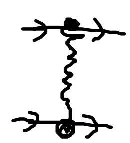
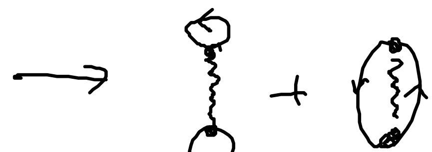
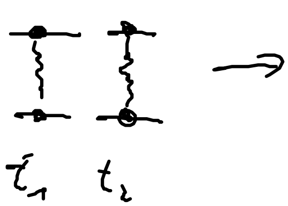
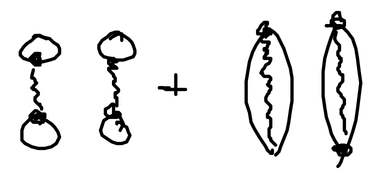
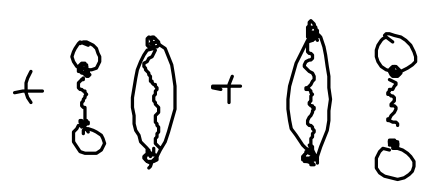
l n

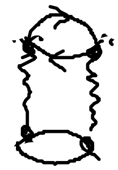
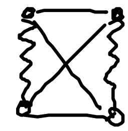
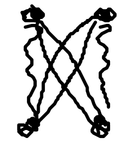


4.) Zur Berechnung der n-ten Ordnung Störungstheorie wird:

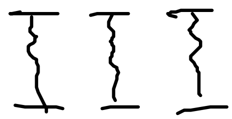
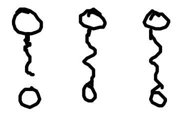
a) n-Wechselwirkungsdiagramme an Zeitachse zeichnen

b) alle mögl. Verbindungen (Kontraktionen) ausführen zwischen den Pfeilen

Ordnung n	Anzahl $(2n)!$		Diagramme
0	1		die Zahl „1"
1	2	 gleiche Zeit	
2	24		 

$+$  $+$  $+$ 

3

720  $\longrightarrow$  $+ \ldots$