## Bemerkungen

a) über $\underline{U}_{WW}(t,t')$ zwei Größen definiert

Streuamplitude / Vakuumamplitude

$\lim_{t,t' \to \pm\infty} \langle \phi_i | \underline{U}_{WW}(t,t') | \phi_f \rangle$ / $R(t,t') = \langle \phi_0 | \underline{U}_{WW}(t,t') | \phi_0 \rangle$

$$\underline{U}_{WW}(t,t') = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{t'}^{t} dt_1 \cdots \int_{t'}^{t} \langle T \, \underline{H}_{WW}(t_1) \cdots \underline{H}_{WW}(t_n) \rangle$$

b) Operatoren in dieser Formel

$\underline{U}_{WW} \left( \underline{a}^+(t), \underline{a}(t), \underline{b}(t) \right)$

WW-Bild WW-Bild, Strich wird mitgeschrieben

Wechsel zw. Formulierg. mögl. wenn man $\langle \Psi(t) | O | \Psi(t) \rangle$ unverändert läßt

Schrödinger-Wellenfkt

$$\langle \Psi(t) | O | \Psi(t) \rangle = \langle \Psi' | O' | \Psi' \rangle$$

transformierte Größe

gilt, wenn: $|\Psi(t)\rangle \to A(t)\, |\Psi(t)\rangle = |\Psi'\rangle$

Operator

$$O \to A\, O\, A^{\dagger} = O'$$

wenn $A^{\dagger} = A^{-1}$ (unitär)

gut extra kontrollieren

Wechselwirkungsbild $A = e^{i\frac{H_0}{\hbar}t}$ gewählt $(H = H_0 + H_{ww})$

$$|\underline{\Psi(t)}\rangle = e^{i\frac{H_0}{\hbar}t}\,|\Psi(t)\rangle$$

WW-Bild    Sch.-Bild

$$\underline{O(t)} = e^{i\frac{H_0}{\hbar}t}\, O\, e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t}$$

Ziel ist Vereinfachung wenn man statt der „alten" Schrödingergl. eine gleiche (einfache?) aufschreibt:

Zeit (gibt es in Schrödingergl. nicht)

WW-Bild: $i\hbar\, |\underline{\Psi(t)}\rangle = \underline{H}_{ww}(t)\, |\underline{\Psi(t)}\rangle$

ww Wechselwirkg.

die se Vereinfachg. ist „erkauft" durch Komplizierg. der Operatoren

$$\underbrace{i\hbar\, \dot{\underline{O}} = [H_0, \underline{O}]}$$

$$\underline{a}_n^{(+)}(t) = e^{i\frac{H_0}{\hbar}t}\, a_n\, e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t} = e^{\overset{(+)}{-} i\frac{E_n}{\hbar}t}\, a_n^{(+)}$$

führt auf eine etwas einfachere Schrödingergl.

mit ein Ansatz:

$$|\underline{\psi}(t)\rangle = \underline{U}_{WW}(t,t')\,|\psi(t')\rangle$$

dieser Ansatz führt auf die Reihe für $U_{WW}(t,t')$. (letzte VL)

## c) Mittelwerte in der Formeln

$$\langle\,\cdot\,\rangle \nearrow \langle\phi_0|\ \vdots\ |\phi_0\rangle \quad \text{Beweis dieser Formel später}$$

$$\searrow \ Sp(\,\cdot\,\rho\,)$$

(mit Wärmebad)

d) gesucht sind $\langle T\, a_1^+(t_1)\, a(t_2) b\ a^+ a\ a\ c\rangle$

(denn $\sim \langle T\, \underline{H}_{WW} \dots\rangle$)

z.B. Coulomb WW: $\frac{1}{2}\sum_{nmkl} V_{nmkl}\, a_n^+(t)\, a_m^+(t)\, a_k(t)\, a_l(t)$

## 1.4.1. Wick Theorem

Erwartungswerte zeitgeordneter Operatorprodukte zerlegen
(in kleinere Bausteine)

<u>Baustein 1</u> $D(t_1,t_2) = \sum_\alpha g_\alpha^2 \left\{ (1+n_\alpha) e^{-i\omega_\alpha |t_1-t_2|} + n_\alpha e^{+i\omega_\alpha |t_1-t_2|} \right\}$

Phononpropagator

$\alpha$ - Phononmode

$n_\alpha$ - Bose verteilung $(T)$

(von 2 Konstanten)

<u>Wick theorem 1</u>: Zeitgeordnete Produkte v. vielen Operatoren im WW Bild werden in zeitgeordnete Produkte v. 2 Operatoren zerlegt

$$\langle T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \cdots \rangle = \sum_{\substack{\text{alle mögl.}\\ \text{Kombination}}} \prod_{(a,b)} D(t_a, t_b)$$

$$\sum_{\alpha_1} \left( b_{\alpha_1}^{+}(t_1) + b_{\alpha_1}(t_1) \right) g_{\alpha_1}$$

z.B. $\langle T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle$

$$= \underbrace{\langle T \phi_1 \phi_2 \rangle}_{D(t_1,t_2)} \underbrace{\langle T \phi_3 \phi_4 \rangle}_{D(t_3,t_4)} + \langle T \phi_1 \phi_3 \rangle \langle T \phi_2 \phi_4 \rangle$$

$$+ \langle T \phi_1 \phi_4 \rangle \cdot \langle T \phi_2 \phi_3 \rangle$$

Baustein 2: $G(t_1 t_2) = \langle T a_1^+ a_2 \rangle = \delta_{12} f_1^F e^{i\frac{\varepsilon_1}{\hbar}(t_1 - t_2)}$

$a_{u_1}^+(t_1)$

$1 \hat{=}$ Elektron mod

$f^F(T)$ Fermifunktion mit Energie $\varepsilon_1$

7. Wicktheorem: Zeitgeordnete Produkte v. El-Operatoren im WW Bild: wird in 2er Produkte zerlegt:

$$\langle T a_1^+ a_2 a_3^+ a_4 \rangle =$$

$$\langle T a_1^+ a_2 \rangle \langle T a_3^+ a_4 \rangle - \langle T a_1^+ a_3^+ \rangle \langle T a_2 a_4 \rangle$$

Statt $-$ wie bei Bosonen behandelbar und VZ mit Anzahl $V$ der nötigen gedachten Vertauschg. geht

$(-1)^V$ = Vorzeichen

$$+ \langle T a_1^+ a_4 \rangle \underbrace{\langle T a_2 a_3^+ \rangle}$$

$(-1)^2$

$$G^+(t_2,t_3) = \delta_{23}\,(1-f_2^F)\,e^{-i\varepsilon_2(t_2-t_3)}$$

3. Wick theorem: beliebig Operatoren unter ein $\langle\ \rangle$

$$\langle T\, a^+ b^+ a\, b\rangle \overset{\nearrow}{=} \langle T\, a^+ a\rangle\,\langle T\, b^+ b\rangle$$

faktorisiert

2. Wick 1. Wick

## 1.4.2. Diagrammdarstellg. der Coulomb-WW

brauch $\underline{U}_{WW}(t,t') = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(t,t')$

$$W_n = \frac{1}{n!}\frac{1}{(i\hbar)^n}\int_{t'}^{t} dt_1 \cdots \int_{t'}^{t} dt_n \,\langle T\, V_1 \cdot V_2 \cdots V_n\rangle$$

$$V_i = \sum_{n_i m_i \ell_i k_i} V_{n_i m_i \ell_i k_i}\, a^+_{n_i}(t_i)\, a^+_{m_i}(t_i)\, a_{k_i}(t_i)\, a_{\ell_i}(t_i)$$

man kann eine Ordng hinschreiben und und Wick 2 zerlegen:

$$\langle T\, a^+_1 a^+_1 a_1 a_1\; a^+_2 a^+_2 a_2 a_2\; a^+_3 a^+_3 a_3 a_3\rangle \quad \text{3. Ordng}$$

$$\to \sum_{\substack{\text{alle}\\ \text{Komb.}}} G\; G\; G\; G \;\cdots$$

wie viele Faktoren?

zunächst $\left( \langle T\, a^+ a^+ \rangle = 0 \quad \langle T\, a\, a \rangle = 0 \right)$

Anzahl d. $G$'s in der $n$-ten Ordnung: $2n$ Erzeuger, $2n$ Vernichter

jedes $a^+$ kann mit $2n$ Vernichter kombinieren

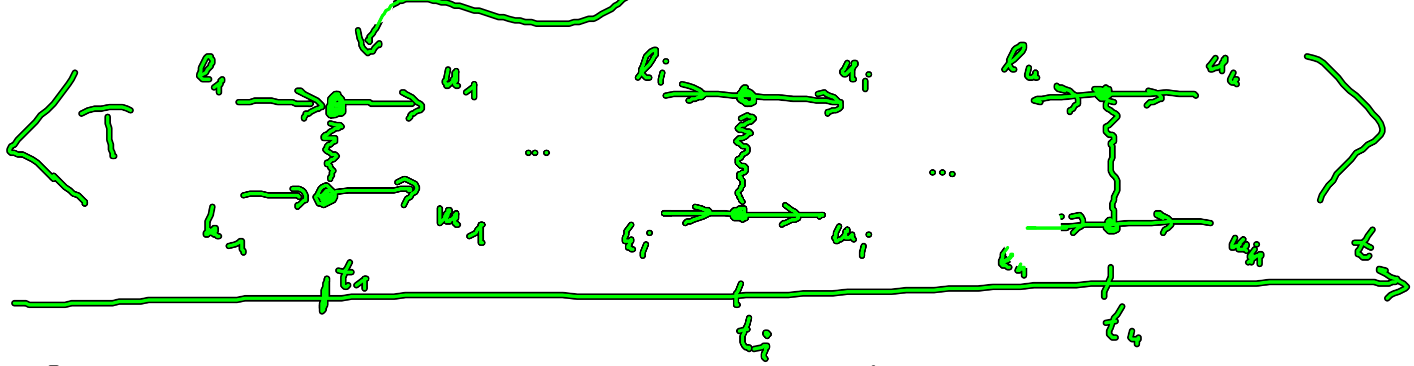
der nächste Erzeuger kann nur mit $(2n-1)$ Vernichter kombinieren.

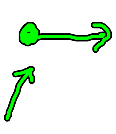
$$2n(2n-1)(2n-2)\cdots = \underline{\underline{(2n)!}}$$

Jeder Summand enthält $(2n)!$ Elektronpropagatoren $G$ bzw $G^+$

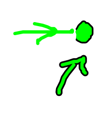
man verwendet graphische Darstellung:

$$\frac{1}{n!}\,\frac{1}{(i\hbar)^n}\,\frac{1}{2^n}\left\langle T\; \underbrace{V_{n_1 m_1 l_1 k_1}\, a^+_{n_1} a^+_{m_1} a_{k_1} a_{l_1}(t_1)} \cdots (t_i) \cdots (t_n) \right\rangle$$

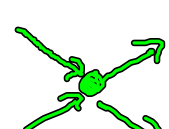



Erzeuger 

Vertex

Vernichter 

Vertex

(  ist eine andere Darstellung) an Vertex findet WW statt

un $\hat{=}$ Vorfaktoren + Integrale

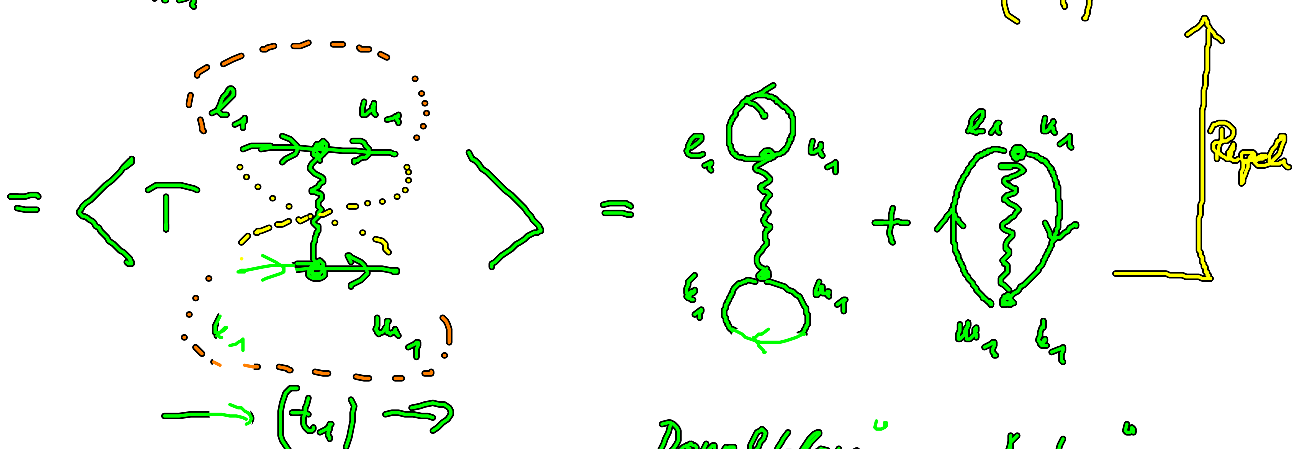
Man möchte jetzt die G's kontrahieren:

<u>Beispiel</u>:

$$\frac{1}{1!\, i\hbar}\langle T\, V(t_1)\rangle = \frac{1}{i\hbar}\,\frac{1}{2}\sum_{\substack{n_1 m_1\\ l_1 k_1}} V_{n_1 m_1 l_1 k_1}\,\langle T\, a^+_{n_1}(t_1)\, a^+_{m_1}(t_1)\, a_{k_1}(t_1)\, a_{l_1}(t_1)\rangle$$

1. Term $(n=1)$

$$= \frac{1}{2i\hbar}\sum_{\substack{n_1 m_1\\ l_1 k_1}} V_{n_1 m_1 l_1 k_1}\Big(\overset{0}{G}_{n_1 l_1}(t_1-t_1)\,\overset{0}{G}_{m_1 k_1}(t_1-t_1) \underset{(-1)^3}{-} G_{n_1 k_1}(0)\,G_{m_1 l_1}(0)\Big)$$




„Doppelblase" „Auster"

<u>Ziel</u>: die Reihe in Bilder übersetzen,

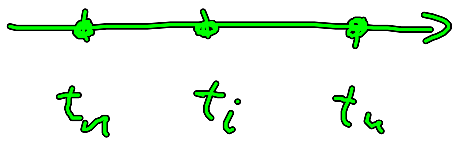
durch Iteration Näherung machen oder

<u>Teile</u> der Reihe aufzusummieren (nicht störungstheoretisch)

dann aber zurück übersetzen!

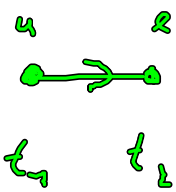
## Feynman Regeln f. diagrammatisches Aufschreiben der Vakuumamplitude

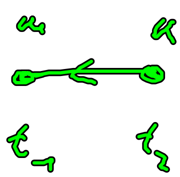
1.) Zeitachse läuft v. links nach rechts

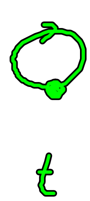



bezieht sich auf Zeitpkte (Vertex, Vertices)

2.) zwischen den Vertizes laufen immer Pfeile die „G" bzw. „$G^+$" repräsentieren

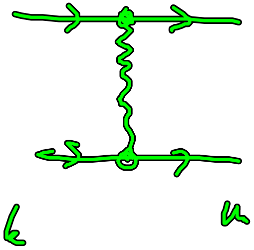
$G(t_1 - t_2)$ 


, $G^+$ 


$G(0)$ 


3.) Wechselwirkung z. Zeit wird durch ⌇ dargestellt

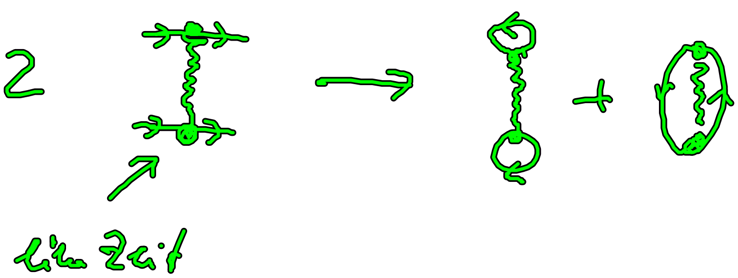
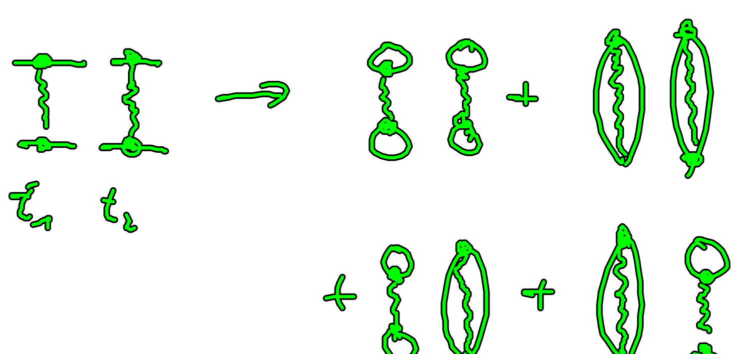
e u

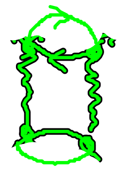
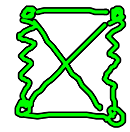
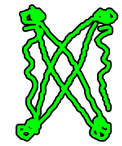


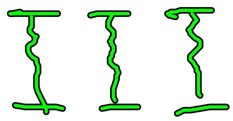
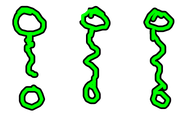

4.) zur Berechnung der n-ten Ordnung Störungstheorie wird:

a) n- Wechselwirkungsdiagramme an Zeitachse zeichnen

b) alle mögl. Verbindungen (Kontraktionen) ausführen zwischen den Pfeilen

| Ordnung n | Anzahl $(2n)!$ | Diagramme |
|---|---|---|
| 0 | 1 | die Zahl „1" |
| 1 | 2 |   |
| 2 | 24 |   |

$+$  $+$  $+$ 

3     720  $\to$  $+ \ldots$