

Klausur: vorauss. H 010f

Bitte Web eintragen beachten.

1.4.3. Berechnung des Elektronen propagators

beginnen wir bei der Berechnung zeitgeordneter

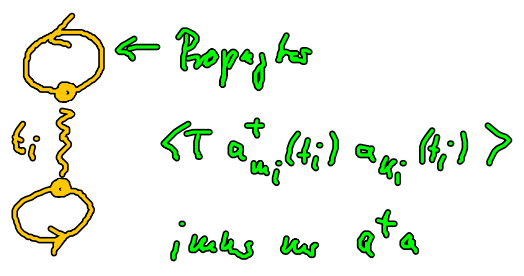
Produkte über Diagramme,

„binden“ von Indizes:

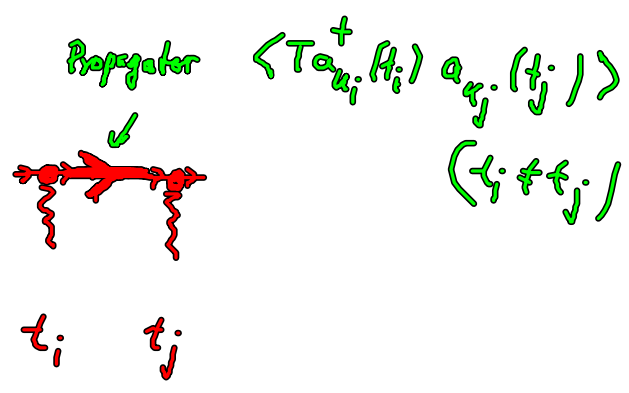
Cauchy-Wahl aus \mathbb{R}^4 :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}^4 \sum_{\substack{\uparrow \\ \text{index } (i_1, i_1, i_2, i_2)}} \dots V(t_i) - V(t_j) \dots \langle T \dots a_{i_1}^+(t_i) a_{i_1}^+(t_i) a_{i_2}(t_j) a_{i_2}(t_j) \dots \dots a_{j_1}^+(t_j) a_{j_1}^+(t_j) a_{j_2}(t_j) a_{j_2}(t_j) \dots \rangle$$

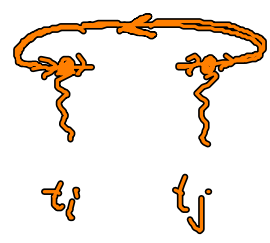
(a) gleichzeitig Paarung



(b) nicht gleichzeitig, aber
normal geordnet $a^+ a$



(c) nicht gleichzeitig, aber
nicht normal geordnet $(a a^+)$
Propagator $<T a_{n_i}(t_i) a_{n_j}^+(t_j)>$



aus Vertauschung f. Spinnlinie:

$$\frac{1}{i\hbar} \int dt_i \sum_{n_i, n_j, t_i, t_j} V_{n_i, n_j, t_i, t_j} \hat{=} \begin{matrix} \bullet \\ \text{wavy line} \\ \bullet \\ t_i \end{matrix}$$

$$G_{ab}(t_a, t_b) \hat{=} \begin{matrix} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ t_a & & t_b \end{matrix}$$

$$G_{ab}^+(t_a, t_b) \cong \begin{array}{ccc} \bullet & \longleftarrow & \bullet \\ t_a & & t_b \end{array} \quad (\text{„Ladung“} \text{ „ausgetauscht“})$$

$$G_{ab}(t_a, t_a) \cong \begin{array}{ccc} \bullet & \circlearrowleft & \bullet \\ t_a & & t_a \end{array}$$

↑ Bild



Elektronpropagator (siehe VL - bitte die Formel dafür vorlesen)

$$(a) \quad \langle T a_{n_i}^+(t_i) a_{k_i}(t_i) \rangle = \text{sp}(\rho_0 a_{n_i}^+(t) a_{k_i}(t)) \equiv G_{nk}(t, t)$$

↑ nicht benötigt, ist so konstant f. gleich Zeit

↑ Grundzustandsenergie

$$= \text{sp} \left(\frac{e^{-\beta H_0}}{Z} \sum_n e_n a_n^+ a_n \text{ in Bildproj.} \right) = \frac{1}{Z} \text{sp} \left(a_n^+(t) e^{-\beta H_0} e^{-\beta E_n} a_k(t) \right)$$

Zyklisch erweitert

$$\rightarrow \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n} \text{sp} \left(e^{-\beta H_0} a_k(t) a_n^+(t) \right)$$

↑ bildet für Vertausch (Zahl)

$$\delta_{kn} = \underline{a_n^+(t) a_k(t)}$$

$$G_{nk} = (\delta_{kn} - G_{nk}) e^{-\beta \epsilon_n}, \quad G_{nk}(t, t) \equiv G_{nk}$$

$$\downarrow G_{nk} = \frac{\delta_{kn}}{e^{\beta \epsilon_n + 1}} = \boxed{\delta_{kn} \int_{\mathcal{K}} \rho^F = G_{nk}(t, t)}$$

↑
Temperatur

Bemerk.

$$e^{-\beta H_d} a_i^\dagger e^{\beta H_d} = e^{-\beta \epsilon_i} a_i^\dagger \quad (\text{Kochschleifen})$$

$$(\text{WW-Bild: } \beta \rightarrow -i t)$$

$$(b) \quad G_{12}(t_1, t_2) = \langle T a_1^\dagger(t_2) a_2(t_1) \rangle$$

↑
(u_1, u_2)

$$T a_1^\dagger(t_1) a_2(t_2) = \theta(t_1 - t_2) a_1^\dagger(t_1) a_2(t_2) + \theta(t_2 - t_1) a_2(t_2) a_1^\dagger(t_1)$$

↑
acht die Zeit

$$t_1 \omega_1 = \epsilon_1$$

$$+ \theta(t_2 - t_1) a_2(t_2) a_1^\dagger(t_1)$$

($t_2 > t_1$)


$$G_{u_1 u_2}(t_1, t_2) = \theta(t_2 - t_1) e^{i\omega_1(t_2 - t_1)} \delta_{u_1 u_2} f_{u_1}^F + \theta(t_1 - t_2) e^{i\omega_2(t_2 - t_1)} \delta_{u_1 u_2} (1 - f_{u_1}^F)$$

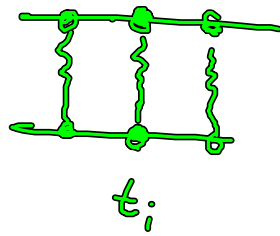
$$\begin{aligned} (c) \quad G^+(t_1, t_2) &= \langle T a_1(t_1) a_2^+(t_2) \rangle \\ &= \theta(t_1 - t_2) e^{-i\omega_1(t_2 - t_1)} \delta_{u_1 u_2} f_{u_1}^F \\ &\quad + \theta(t_2 - t_1) e^{-i\omega_2(t_2 - t_1)} \delta_{u_1 u_2} (1 - f_{u_1}^F) \\ &= G(t_2, t_1) \quad \leftarrow \\ &\quad G(t_1, t_2) \quad \rightarrow \end{aligned}$$

1.4.4. Übersetzungsschritte

Idee: in ein Ordng u alle Diagramme aufzeichnen
und diese zuteilen oder durch benden die wählbaren
in der Ordnung mitzeichnen

Beispiel:  Ring diagram für hohe Elektronendichte


 Kaulgruppen diagramme = 0 für räumlich
 kompakte Systeme



Leitungsdiagramm für niedrigste Ordnungen
 nicht wichtig

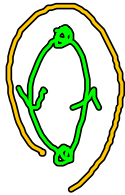
Übersetzung des Diagramms in Formel: Sie sehen ein Diagramm -
 was machen Sie?

1/ für alle Vertices wird ein Zeitintegral eingeschrieben: $\int dt_i$,
 für alle Vertices wird auch die Σ über die Partikeln
 und die Matrixelemente des \mathcal{L}_I eingeschrieben

$$\rightarrow \int dt_i \sum_{u_i, v_i, \dots} V_{u_i, v_i, \dots}$$

2/ jeder Term wird mit Vorzeichen $(-1)^l$ versehen

wobei l die Zahl geschlossener Fermionenschleifen ist:



$$l=2 \rightarrow (-1)^2 = 1$$

"closed loops"

3) Wick Verfahren : für n-k Ordnung

(u - Wellenfunktion) $\left(\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ i\hbar \end{matrix} \right)^n$, $\frac{1}{u_0!} \left(\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 2^n \end{matrix} \right)$
 $\nwarrow \frac{1}{2}$ vor $U_{in} \hbar$

4) alle Propagatorlinien des Aufbaues werden auf Indizes und Zeit Kreuze multipliziert

1.4.5 Val um asymptotisch

Grenzwert Energie

$$\bar{E}_{int} - \bar{E}_0 = i\hbar \frac{d}{dt} \ln R(t, t')$$

\nearrow ω Systr $\quad \uparrow$ ω Systr
 mit ω Systr

$$t \rightarrow \infty (1 - i\epsilon)$$

$$R = \langle \phi_f | U_{int}(t, t') | \phi_0 \rangle$$

$$H_0 | \phi_0 \rangle = E_0 | \phi_0 \rangle$$

$$H | \phi_n \rangle = E_{int} | \phi_n \rangle$$

Val um asymptotisch

$$\sum \omega_n$$

a) Hartree - Fock - Energie

$$H_{uv} = \frac{1}{2} \sum_{u \neq v \neq k} V_{uvk} a_u^\dagger a_v^\dagger a_k a_r$$

$$W_1 = \left\langle T \left[\begin{array}{c} \text{diagram with two vertices and a propagator} \end{array} \right] \right\rangle = \begin{array}{c} \text{diagram 1} \\ + \\ \text{diagram 2} \end{array} =$$

$u=1$
 $(2u)! \rightarrow 2$ diagrams in diagram
 Only a factor

$$\text{Reph} = \underbrace{\frac{1}{1!} \frac{1}{i\hbar} \frac{1}{2}}_{\text{Vorfaktor}} \int_{t'}^t dt_1 \sum_{u \neq k \neq v} V_{uvk} \underbrace{(-1)^2}_{\text{loopregel}} G_{uc} G_{vk} \underbrace{-1}_{\text{Fall a c u v l e}} G_{uk} G_{vu}$$

Repl 1

(Fall a c u v l e)

$$G_{uc} \sim \delta_{uc} f_a^{\bar{F}}$$

$$= \frac{1}{2i\hbar} (t - t') \sum_{u, v} (V_{uvuv} \int_u^{\bar{F}} \int_v^{\bar{F}} - V_{uvuv} \int_v^{\bar{F}} \int_u^{\bar{F}}) = W_1$$

Zu Vakuumamplitude: $\ln(1 + W_1) \approx W_1$

$$\Delta E = i\hbar \frac{d}{dt} W_1 = \frac{1}{2} \sum_{u, v} (V_{uvuv} \int_u^{\bar{F}} \int_v^{\bar{F}} - V_{uvuv} \int_v^{\bar{F}} \int_u^{\bar{F}})$$

direkter Anteil

Austauschbeitrag

$$V_{1234} = \iint d\vec{r} d\vec{r}' \frac{\varphi_1^*(\vec{r}) \varphi_2^*(\vec{r}') \varphi_3(\vec{r}) \varphi_4(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'| 4\pi\epsilon_0}$$

direkt: $1=3$
 $2=4$

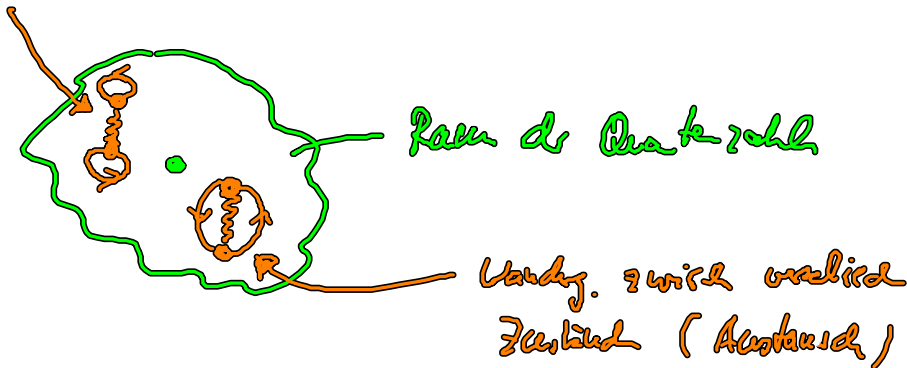
$|\psi_1(\vec{r})|^2 |\psi_2(\vec{r}')|^2$ WW klassisch kompatibel

Austausch $1=4$
 $3=2$

$\psi_1^*(\vec{r}') / \psi_1(\vec{r}') \psi_2^*(\vec{r}) / \psi_2(\vec{r})$

kann nicht 2 klassischen Zuständen zugeordnet werden

Es bleiben in Zustand



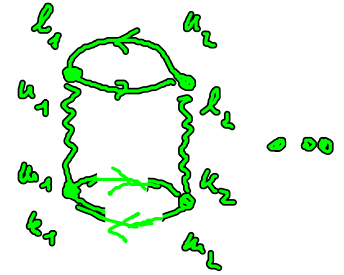
Besonderheit in räumlich korreliert System: (low uncorrelated, if uncorrelated \Rightarrow fermion unrel.)

$\int \psi = 0 \rightarrow \text{WW} = \text{Energie} < 0$

in einem Metallblock wird die chemische Bindung durch die Austausch WW geändert (Energie absenkung.)

b) ein Eilen Diagramm

2. Order

$$\langle T \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ t_1 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ t_2 \end{array} \right] \rangle = \text{24 Diagramme} \\ \left((2 \cdot 2)! = 24 \right)$$


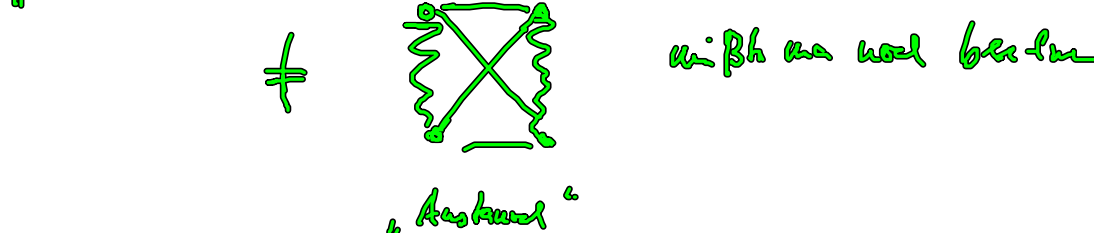
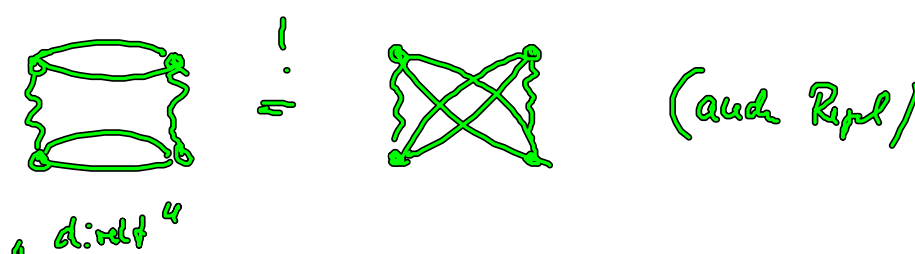
Loops Vertiefen:

$$\frac{(-1)^2}{2!} \left(\frac{1}{2ik} \right)^2 \int dt_1 \int dt_2 \sum_{\{1\}} \sum_{\{2\}} V_{a_1 a_1 b_1 b_1} V_{a_2 a_2 b_2 b_2}$$

$$\left(G_{a_1 a_2}^+(t_1, t_2) \underbrace{G_{a_1 a_2}(t_1, t_2)}_{(t_2 - t_1)} G_{a_1 a_2}(t_1, t_2) G_{a_1 a_2}(t_1, t_2) G_{a_1 a_2}^+(t_1, t_2) \right)$$

ohne Feyn:

$$\Delta E \text{ [Cylinder]} = -\frac{1}{4} \sum_{a,b,c,k} \frac{V_{a,b,c,k}^2}{4^2} \frac{(1-f_c^F) f_a^F f_b^F (1-f_k^F)}{\epsilon_c - \epsilon_a - \epsilon_b + \epsilon_k}$$

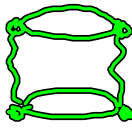
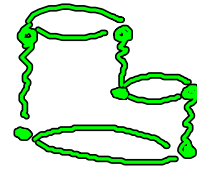
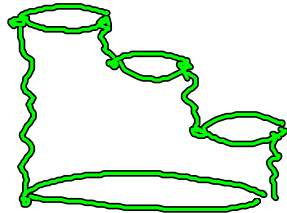


c) Formale Rechnung und Diagramm : Stärke!

man stellt fest  \Rightarrow as Wert im Metalle

\rightarrow funktioniert, aber: man kann ein as Reihe solcher

Diagramme bilden und aufsummieren:

Reihe:  +  +  + ...

$$= \text{Cylinder} \left(1 + \text{Loop} + \text{Loop}^2 + \dots \right)$$

$$= \text{Cylinder} \left(\frac{1}{1 - \text{Loop}} \right)$$

$$\equiv \text{Cylinder} \left(\frac{e^{-\lambda r}}{r} \right)$$

$$V \sim \frac{1}{r}$$

neue Wechselwirkung:
im Metalle ist das eine
abgestimmte Wellenfunktion

den egitt de Pi^og

2. Ordg. den endhile Gest