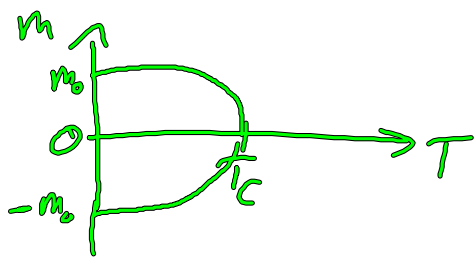


Wdh: $m = \tanh(\beta J m)$ (im Fall $h=0$)

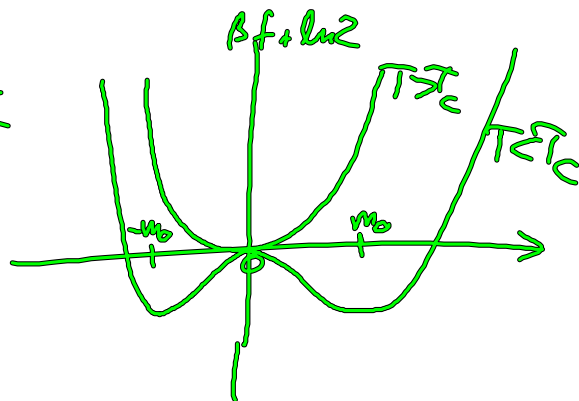


$$m_0 \sim \left(\frac{T_c - T}{T_c}\right)^\beta \quad \text{mit } \beta = \frac{1}{2}$$

Stabilität der Lösung, insbesondere $T < T_c$

betrachte dafür die freie Energie pro Teilchen

$$f = \frac{F}{N}$$



→ die Lösung mit $m=0$ ist für $T < T_c$ instabil

Alternativ: Betrachte die magnetische Suszeptibilität

$$\chi = \left. \frac{\partial m}{\partial h} \right|_{h=0}$$

Nullfeld-Suszeptibilität

$$m = \tanh(\beta J m + \beta h)$$

man findet (siehe Übungs zettel)

$$\chi = \frac{\beta}{\frac{1}{1-m^2} - \beta J} \quad (*) \quad \text{für } h=0$$

Fallunterscheidung

a) $T > T_c$

⇒ $m=0$

aus (*) ⇒

$$\chi = \frac{\beta}{1 - \beta J}$$

$$= \frac{1}{k_B T} \cdot \frac{1}{1 - \frac{T_c}{T}}$$

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$\beta J = \frac{T_c}{T}$$

$$= \frac{1}{k_B(T-T_C)} \quad \text{positiv für } T > T_C!$$

aufßerdem:

$$\chi = k_B^{-1} (T-T_C)^{-\gamma} \quad \text{mit } \gamma=1$$

Potenzgesetz meanfield-Exponent

Lösung mit $m=0$ ist thermodynamisch stabil!

Die magnet. Suszeptibilität des unendlich langreichweitigen Ising-Modells verhält sich also genau wie die isotherme Kompressibilität im Van-der-Waals-Modell für $T \rightarrow T_C$!

b) $T < T_C$

Erinnerung: Hier gibt es 3 Lösungen der Selbstkonsistenzgleichung, nämlich $m=0$
 $m = \pm m_0$

paramagnet. Lösung ($m=0$) ist instabil, denn

$$\chi|_{m=0} = \frac{1}{k_B(T-T_C)} < 0 \quad \text{für } T < T_C$$

Widerspruch zur thermodyn. Aussage, dass Suszeptibilitäten immer positiv sein müssen!

aufßerdem:

$$\begin{aligned} \text{es gilt } \chi &\sim (\langle s^2 \rangle - \underbrace{\langle s \rangle^2}_{m^2}) \cdot N \\ &= \langle (s - \langle s \rangle)^2 \rangle \cdot N \end{aligned}$$

muss positiv sein
(da man quadrat. Ausdruck mittels)

betrachte nun die ferromagnet. Lösung $m = \pm m_0$

nach ④
$$\chi = \frac{\beta}{\frac{1}{1-m_0^2} - \beta J} \Rightarrow \text{Nenner } (1-m_0^2)^{-1} - \beta J > 0$$

~~z~~ zeige das für Temperaturen direkt unter $T_C \rightarrow m_0$ klein

$$\frac{1}{1-m_0^2} \approx 1 + m_0^2$$

(folgt aus Taylorentwicklung)

betrachte also $\frac{\epsilon}{\chi T}$

$$1 + m_0^2 - \beta J$$

benutze

$$m_0^2 = 3 \left(\frac{T}{T_C}\right)^2 \left(\frac{T_C - T}{T_C}\right)$$

$$\approx 1 + 3 \left(\frac{T}{T_C}\right)^2 \frac{T_C - T}{T_C} - \frac{T_C}{T}$$

$$= \frac{T - T_C}{T} + 3 \frac{T^2}{T_C^2} \frac{T_C - T}{T_C}$$

$$\frac{T_C}{T} \left(\frac{T - T_C}{T_C}\right)$$

$$\frac{T}{T_C} = \frac{\epsilon}{T - T_C} + 1 \approx 1$$

$$= 2 \frac{T_C - T}{T_C} > 0$$

für $T < T_C$!

Beachte:

für $T \rightarrow 0 \Leftrightarrow m_0 \rightarrow \pm 1 \Rightarrow \chi \rightarrow 0$

dem:

$$\chi = \frac{\beta}{\underbrace{\frac{1}{1-m_0^2}} - \beta J} \rightarrow 0$$

$\rightarrow 0$ für $m_0^2 \rightarrow 1$

Plausibel; dem: Für $T \rightarrow 0$ sind die Spins
'ungefähr'
d.h. es gibt kein thermisches Rauschen
 \rightarrow äußeres Feld kann nicht mehr
orientieren! $\left(\chi = \frac{\partial m}{\partial h} \Big|_{h=0} \right)$

II.7. Kondensationsfunktionen (Ising-Modell)

Betrachte jetzt ein sogenanntes Kurvenstückiges
Ising-Modell (Kontakt: nächste-Nachbar-Wechselwirkung)

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j \in nN \\ \text{nächste} \\ \text{Nachbar}}} s_i s_j - \sum_{i=1}^N h_i s_i$$

es gilt (allgemein, unabhängig von der MF-Näherung)

$$m_i = \langle s_i \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{s\}} s_i e^{-\beta H} \quad \text{mit } Z = \sum_{\{s\}} e^{-\beta H}$$

definiere nun eine ortsabhängige Suszeptibilität

$$\begin{aligned} \chi_{ij} &= \frac{\partial m_i}{\partial h_j} = \frac{1}{Z} \sum_{\{s\}} s_i \beta s_j e^{-\beta H} \\ &\quad - \frac{1}{Z^2} \left(\sum_{\{s\}} s_i e^{-\beta H} \right) \left(\sum_{\{s\}} s_j e^{-\beta H} \right) \\ &= \beta \langle s_i s_j \rangle - \beta \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle \end{aligned}$$

definiere außerdem die Spin-Spin-Korrelationsfunktion

$$G_{ij} = \langle s_i s_j \rangle - \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle$$

Dann gilt offensichtlich: $\chi_{ij} = \beta G_{ij}$

Anwendung des
Reaktions-
Dispersionstheorems

Suszeptibilität
 $\hat{=}$ Schwankungen
(Fluktuationen)

betrachte nun den Isingfall

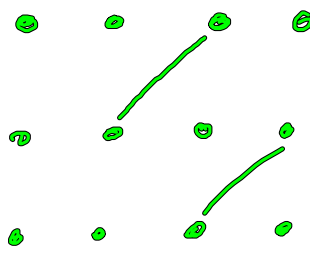
$$\text{d.h. } h_i = 0 \quad \forall i=1, \dots, N$$

$$\text{und } \langle s_i \rangle = m_i = m$$

Translationsinvarianz!

$$G_{ij} = G(\overbrace{\underline{r}_i - \underline{r}_j}^N)$$

↑
Abstand
von Gitterplatz i zu
Gitterplatz j



In einem solchen Fall betrachtet man häufig die Fouriertransformierte
Translokationsvariante

$$\tilde{G}(\underline{q}) = \sum_{\underline{r}} e^{-i\underline{q} \cdot \underline{r}} G(\underline{r})$$

↑
Summe über alle Gitterplätze

$$\begin{aligned} \text{Umkehrung:} \\ G(\underline{r}) &= \frac{1}{N} \sum_{\underline{q}} e^{i\underline{q} \cdot \underline{r}} \tilde{G}(\underline{q}) \\ \delta_{\underline{r}, \underline{q}} &= \frac{1}{N} \sum_{\underline{r}} e^{i(\underline{r} - \underline{q}) \cdot \underline{r}} \end{aligned}$$

Betrachte $\tilde{G}(\underline{q})$ speziell für den Fall $\underline{q} \rightarrow 0$
 („langwellige“ ¹⁹¹ Grenzfall)

$$\lim_{\underline{q} \rightarrow 0} \tilde{G}(\underline{q}) = \lim_{\underline{q} \rightarrow 0} \left(\sum_{\underline{r}} e^{-i\underline{q} \cdot \underline{r}} G(\underline{r}) \right)$$

$$\text{benutze } e^{-i\underline{q} \cdot \underline{r}} \approx 1 - i\underline{q} \cdot \underline{r} + \frac{1}{2}(-i\underline{q} \cdot \underline{r})^2 + \dots$$

$$= \sum_{\underline{r}} G(\underline{r})$$

$$= \sum_{\underline{r}} \left(\langle S(\underline{r}) S(\underline{0}) \rangle - \underbrace{\langle S(\underline{r}) \rangle}_m \underbrace{\langle S(\underline{0}) \rangle}_m \right)$$

homogene Suszeptibilität

Uns interessiert jetzt die
 Abstandsabhängigkeit der Magnetisierbarkeit
 $\chi(\underline{r})$ dicht am Krit. Punkt!

„Onstein - Zernike - Näherung“
 (02)

Bem.: Ursprünglich wurde die OZ - Theorie auf
 Flüssigkeiten angewandt; sie ist aber direkt
 auf Spin-Systeme übertragbar!

Ausgangspunkt:

Selbstkonsistenzgleichung in MF - Näherung (hier ohne
 Beweis)

$$m_i = \tanh \left(\beta \left(\sum_{\substack{j \in \text{nächste} \\ \text{Nachbar}}} J_{ij} m_j \right) + \beta h_i \right)$$

mit $J_{ij} = \begin{cases} J & \text{falls } i, j \\ & \text{nächste Nachbarn} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

daraus die abhängige Suszeptibilität

$$\chi_{\text{kl}} = \frac{\partial m_i}{\partial h_i} = \frac{1}{\cosh^2 \left(\beta \sum_j J_{ij} m_j + \beta h_i \right)} \left(\beta \sum_j J_{ij} \frac{\partial m_j}{\partial h_i} + \beta \right) \quad \text{mit } \frac{\partial m_j}{\partial h_i} = \chi_{ji}$$

$$\cosh^2 x = \frac{1}{1 - \tanh^2 x} = \frac{1}{1 - m_k^2}$$

Selbstkonsistenzgleichung

$$\Rightarrow \chi_{kl} = \left(\frac{1}{1 - m_k^2} \right)^{-1} \left(\beta \sum_j J_{kj} \chi_{jl} + \beta d_{kl} \right)$$

speziellere wieder auf den Isingfall,
translation invarianten Fall:

$$\begin{aligned} \chi_{kl} &= \beta S_{kl} \\ &= \chi(r_k - r_l) = \beta G(r_k - r_l) \end{aligned}$$

Übergang zur Kontinuumsdarstellung:

Im Ausdruck für χ_{kl} ersetzen wir

$$d_{kl} \rightarrow d(r_k - r_l)$$

$$\text{und } \sum_j J_{kj} \chi_{jl} \rightarrow \frac{1}{v} \int d\underline{r} J(\underline{r}_k - \underline{r}) \chi(\underline{r} - \underline{r}_l)$$

mit v : Volumen einer Einheitszelle
des Gitters

Kopplungskennlinien,
die nur im Bereich
des nächsten Nachbarn
 $\neq 0$ Null ist

⇒ Kalkulatorische Ausdruck für die
 abhängige Suszeptibilität.

$$\chi(\omega_1 - \omega_2) = \left(\frac{1}{1 - m^2} \right)^{-1} \beta \int_{\omega_2}^{\omega_1} J(\omega_1 - \omega) \chi(\omega - \omega_2) + \beta d(\omega_1 - \omega_2)$$

Feldkopplung

nutzt: Fouriertransformierte.

$$\tilde{\chi}(q) = \frac{1}{v} \int d\underline{r} e^{-iq \cdot \underline{r}} \chi(\underline{r})$$

es ergibt sich:

$$\tilde{\chi}(q) = (1 - m^2) \beta \tilde{J}(q) \tilde{\chi}(q) + \beta$$

auflösen nach $\tilde{\chi}(q)$

man erhält:

$$\tilde{\chi}(q) = \frac{\beta}{\frac{1}{1 - m^2} - \beta \tilde{J}(q)} = \beta \tilde{\chi}(q)$$

Das ist offensichtlich die direkte Verallgemeinerung unserer
 früheren Ausdrucks für die homogene Suszeptibilität

$$\chi = \frac{\beta}{\frac{1}{1 - m^2} - \beta J} = \frac{\partial m}{\partial h} \Big|_{h=0}$$

d.h. die Fouriertransformation der Koppelgleichungen, $\hat{J}(q)$,
führt uns direkt zu q -Abhängigkeit von \hat{x} bzw. \hat{J}
und damit auch zu Ortsabhängigkeit!

Idee der Arstein-Zernike-Theorie:

Fokus auf Ebene (q) , (d.h. große
Abstände im Ortsraum!)

$$\hat{J}(q) \rightarrow \bar{J} - q^2 J'$$