

a) Verhalten von  $\hat{q} \rightarrow 0$

$$S(\hat{q} \rightarrow 0) = 1 + \rho \hat{h}(\hat{q} \rightarrow 0)$$

$$= \frac{1}{\rho} \hat{G}(\hat{q} \rightarrow 0) = \frac{1}{\rho} \int d\mathbf{r} G(\mathbf{r})$$

$$= \frac{1}{\rho} \frac{1}{V} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \langle \sum_i \sum_j d(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) d(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) \rangle - \rho \int d\mathbf{r}$$

$$= \frac{1}{\rho V} \langle \sum_i \sum_j \underbrace{\int d\mathbf{r} d(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}_1 \underbrace{\int d\mathbf{r}' d(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j)}_1 \rangle - \rho V$$

$$= \frac{1}{\rho V} \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle$$

$$= \frac{\langle N^2 \rangle}{\langle N \rangle} - \langle N \rangle = \frac{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}{\langle N \rangle}$$

Erinnerung an den Fluktuationsausdruck für die isotherme Kompressibilität:

$$\chi_T = - \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_T = \frac{1}{\rho k_B T} \frac{(\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2)}{\langle N \rangle} !!$$

$$\Rightarrow \boxed{S(\hat{q} \rightarrow 0) = \rho k_B T \chi_T !!}$$

Damit ist schon klar

$$T \rightarrow T_c \Leftrightarrow \chi_T \rightarrow \infty \Leftrightarrow S(q \rightarrow 0) \rightarrow \infty!$$

Zusammenhang zum Streuexperiment:

$$q = 2q_0 \sin \frac{\alpha}{2}, \text{ d.h. } q \rightarrow 0 \Leftrightarrow \alpha \rightarrow 0$$

"Vorwärtsstreuung"

also: Bei Annäherung an den  
Krit. Punkt wächst die Intensität bei  
Vorwärtsstreuung stark an

"Kritische Opaleszenz" !!

(klare Flüssigkeit wird trüb)

b) Verhalten für  $q > 0$ ,  $q$  klein.

benutze Ornstein-Zernike-Gleichung:

$$S(q) = 1 + \rho \tilde{h}(q) = \frac{1}{1 - \rho \tilde{c}(q)} \quad (*)$$

← Fourier transformierte der  
sogenannten direkten Korrelationsfunktion

Definition der zweiten Vorkorrelationsfunktion

(→ Dichtefunktionaltheorie)

$$c(\underline{r}_1, \underline{r}_2) \sim -\beta \frac{\delta^2 F^{\text{ex}}[\rho]}{\delta \rho(\underline{r}_1) \delta \rho(\underline{r}_2)}$$

2. Funktional-  
ableitung des  
Wechselwirkungs-  
beitrags zur  
Total Energie

Beachte: Die einfachste Näherung für  $F^{\text{ex}}$  ist

"Mean-Field"

$$F^{\text{ex}} = \frac{1}{2} \int d\underline{r}_1 \int d\underline{r}_2 \rho(\underline{r}_1) \rho(\underline{r}_2) u(\underline{r}_1, \underline{r}_2)$$

- Näherung

$$\Leftrightarrow c(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = -\beta u(\underline{r}_1, \underline{r}_2)$$

aber auch im nicht-gehörten Fall gilt:  $c(r) \rightarrow -\beta u(r)$   
für  $r \rightarrow \infty$

Zurück zur OZ-Gleichung für kleine  $q$  (⊗)

$$(S(q))^{-1} = 1 - \rho \hat{c}(q)$$

$$\approx 1 - \rho \hat{c}(0) + \rho \frac{\rho}{2} \tilde{c}^{(2)}(0) q^2 + \mathcal{O}(q^4)$$

mit  $\hat{c}(0) = \int d\underline{r} c(r)$   
 $= 4\pi \int_0^\infty dr r^2 c(r)$

endlich für konvergenzweilige  
 $c(r) \Leftrightarrow$  für kurzreichweitige  
Wechselwirkungen!

$$\tilde{c}^{(2)}(0) = \frac{\partial^2}{\partial q^2} \hat{c}(q) \Big|_{q=0}$$

$$= -\frac{4\pi}{3} \int_0^\infty dr r^4 c(r)$$

existiert falls  $c(r) \sim -\beta u(r)$   
schneller als  $r^{-4}$  gegen  
Null geht!

$$\Rightarrow S(q) \approx \frac{1}{1 - \rho \tilde{c}(0) + \frac{\rho}{2} \tilde{c}^{(2)}(0) q^2} = \frac{a}{z^2 + q^2}$$

hat genau dieselbe Form wie bei  
den Spin-Korrelation!

$$\begin{aligned} \text{hier: } z &= \frac{1 - \rho \tilde{c}(0)}{\frac{\rho}{2} \tilde{c}^{(2)}(0)} \\ a &= \left( \frac{\rho}{2} \tilde{c}^{(2)}(0) \right)^{-1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  wir können sofort schließen

$$g(r) \sim h(r) \sim \frac{e^{-N/\xi}}{r}$$

$$g(r) = \frac{1}{r} e^{-r/\xi}$$

mit  $\xi = \frac{1}{z} = \frac{2}{\rho \tilde{c}^{(2)}(0) (1 - \rho \tilde{c}(0))}$

man sieht:  
Am krit. Punkt der  
Percolation gilt:  
 $\rho \tilde{c}(0) = 1$  !!

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{\rho}{2} \tilde{c}^{(2)}(0)} \sqrt{S(q=0)} \\ &= \sqrt{\frac{\rho}{2} \tilde{c}^{(2)}(0)} \sqrt{\rho k_B T \chi_T} \end{aligned}$$

das heißt:  $\xi$  und  $\chi_T$  divergieren beide am krit. Punkt!

$$\chi_T \sim (T - T_c)^{-1} \Leftrightarrow \xi \sim (T - T_c)^{-1/2}$$

beachte auch:  $\rho z$ -Verhalten des Strukturfaktors impliziert, dass

$$(S(q))^{-1} = \frac{1}{a} (z^2 + q^2) \quad \text{linear in } q^2$$



wird tatsächlich so gemessen, wenn  
man nicht zu dicht an  $T_c$  ist!