Wh:

Landau:

$$F = a + \frac{b}{2} m^2 + \frac{c}{4} m^4 + \frac{d}{6} m^6$$

$$b = b_0 (T - T_c)$$

Ginzburg-Landau:

$$F = \int d\underline{r}\, f(\underline{r})$$ Dichte der Freien Energie

$$f(\underline{r}) = \left(a(\underline{r}) + \frac{b(T)}{2} m^2(\underline{r}) + \frac{c(T)}{4} m^4(\underline{r}) \underbrace{- m(\underline{r}) h(\underline{r})}_{\text{externes Feld}} + \frac{f}{2} \left(\nabla m(\underline{r}) \right)^2 \right)$$

<u>Bemerkungen</u>

- ~~Ma~~ Die Freie-Energie-Dichte enthält $(\nabla m)^2$ statt ∇m, da F ein Skalar sein muß!

- Die Ginzburg–Landau–Entwicklung setzt voraus, daß sich $m(\underline{r})$ nur langsam mit $\underline{r}$ ändert!

  ~~A~~ Ansonsten kämen auch höhere Ableitungen sowie nicht-lokale Terme vor!
  (d.h. Korrelationen)

- Typischerweise ist der Koeffizient (zu $(\nabla m)^2$) $g > 0$

$\Rightarrow$ Die freie Energie erhöht sich also dadurch, daß die Magnetisierung inhomogen ist!

- Genauso wie bei der homogenen Version (d.h. Landau-Ansatz) wird angenommen, daß sich die Koeffizienten „harmlos" am Phasenübergang verhalten

$$\text{z.B.} \quad b(T) = b_0(T - T_c)$$
$$c(T) = \text{const}$$
$$d(T) = \text{const}$$

— und daß der Ordnungsparameter „klein" ist beim Phasenübergang (bei vielen Phasenübergängen 1. Ordnung ist das faktisch nicht erfüllt!)

Bestimmung des Ordnungsparameters im Gleichgewicht.

Erinnerung homogene Fall:

$$\frac{\partial f}{\partial m} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \text{Selbstkonsistenzgleichung für } m$$

(z.B. Ising)

Ginzburg–Landau:

$$F = \int d\underline{r} \left(a + \frac{b}{2} m^2(\underline{r}) + \frac{c}{4} m^4(\underline{r}) - m(\underline{r}) h(\underline{r}) + \frac{f}{2} (\nabla m(\underline{r}))^2 \right)$$

$$\frac{\delta F}{\delta m(\underline{r}')} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \text{Variationsableitung}$$

Durchführung:

$$\frac{\delta F}{\delta m(\underline{r}')} = \int d\underline{r} \left(\cancel{a \frac{\delta 1}{\delta m(\underline{r}')}} + \frac{b}{2} \frac{\delta m^2(\underline{r})}{\delta m(\underline{r}')} \right.$$

$$(*) \quad \left. + \frac{c}{4} \frac{\delta m^4(\underline{r})}{\delta m(\underline{r}')} - h(\underline{r}) \frac{\delta m(\underline{r})}{\delta m(\underline{r}')} + \frac{g}{2} \frac{\delta (\nabla m(\underline{r}))^2}{\delta m(\underline{r}')} \right)$$

$$\stackrel{!}{=} 0$$

Für die ersten Terme im Integral benutzen wir:

$$\frac{\delta g(m(\underline{r}))}{\delta m(\underline{r}')} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Ableitung von } g \text{ nach } m}}{g'} \frac{\delta m(\underline{r})}{\delta m(\underline{r}')} = g' \delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

$$0 = b\, m(\underline{r}') + c\, m^3(\underline{r}') - h(\underline{r}')$$
$$+ g \frac{1}{\delta m(\underline{r}')} \int d\underline{r}\; \nabla m(\underline{r}) \cdot \delta \nabla m(\underline{r})$$

benutze:

$$\nabla m(\underline{r})\, \delta \nabla m(\underline{r}) = \nabla m(\underline{r}) \cdot \nabla \delta m(\underline{r}) \quad \text{Vertauschung der Ableitung}$$
$$= \nabla \cdot \big(\nabla m(\underline{r}) \cdot \delta m(\underline{r}) \big) - \delta m(\underline{r}) \cdot \Delta m(\underline{r})$$

$$\nabla (\underline{A} \cdot \varphi) = \nabla \cdot \underline{A} \cdot \varphi + \underline{A} \nabla \varphi \quad \text{mit } \underline{A} = \nabla \varphi \text{ und } \varphi = m(\underline{r}) \quad \varphi = \delta m(\underline{r})$$

benutze Gauß'sche Integralsatz

$$\int_V d\underline{r}\; \nabla \cdot \left(\nabla m(\underline{r})\, \delta m(\underline{r}) \right)$$

$$= \int_{\mathcal{F}_V} d\underline{f}\; \nabla m(\underline{r})\, \delta m(\underline{r}) = 0$$

benutze $\delta m(\underline{r}) = 0$
auf dem Rand

betrachte schließlich

$$-\frac{1}{\delta m(\underline{r}')} \int d\underline{r}\; \delta m(\underline{r}) \Delta m(\underline{r}) = -\int d\underline{r}\, \frac{\delta m(\underline{r})}{\delta m(\underline{r}')} \Delta m(\underline{r})$$

$$= -\Delta m(\underline{r}')$$

Einsetzen in die Variationsgleichung:

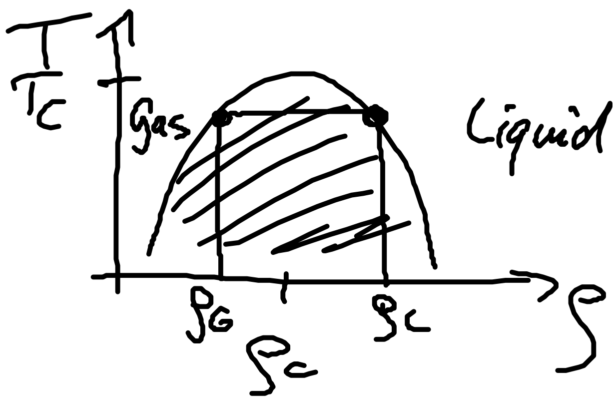
Gleichgewichtsbedingung für die Magnetisierung

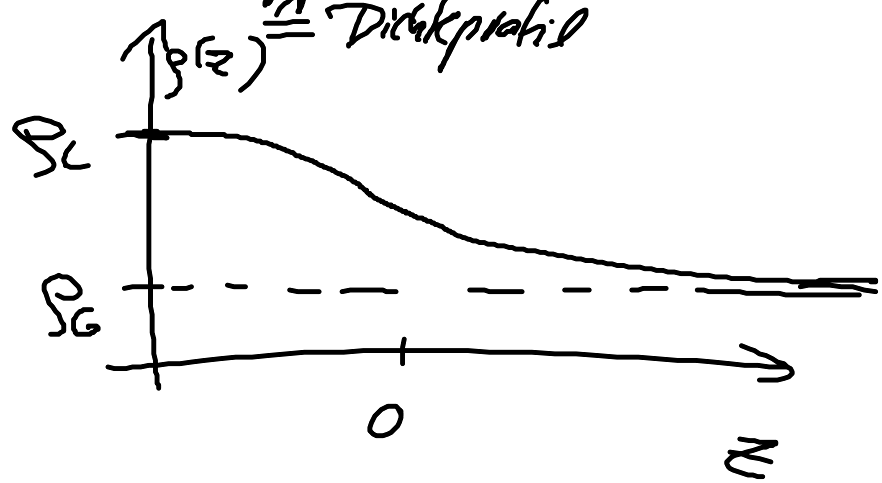
$$\boxed{\begin{aligned} 0 = {} & b\, m(\underline{r}) + c\, m^3(\underline{r}) \\ & - h(\underline{r}) - g\, \Delta m(\underline{r}) \end{aligned}}$$

(direkte Folgerung aus $\frac{d\mathcal{F}}{d m(\underline{r})} \stackrel{!}{=} 0$)

Anwendung des Ginzburg-Landau-Funktionals

$\longrightarrow$ Grenzfläche zwischen einem Gas und einer Flüssigkeit für Temperaturen dicht unterhalb T_C!





$$\lim_{z \to \infty} \rho(z) = \rho_G$$

$$\lim_{z \to -\infty} \rho(z) = \rho_L$$

$F \longrightarrow \Omega$ Großkanon. freie Energie

Ginzburg-Landau-Ansatz

$$\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} dz \left(f_0(\rho(z)) + \underbrace{\frac{f_2}{2}\left(\frac{d\rho(z)}{dz}\right)^2}_{\text{entspricht dem Term } (\nabla m)^2 \text{ in einer Dimension!}} - \underbrace{\mu\,\rho(z)}_{\text{„Feldbeitrag"}} \right)$$

enthält Potenzen von $\rho(z)$, aber keine Ableitungen

Dichteprofil $\rho(z)$ im Gleichgewicht:

$$\frac{\delta\Omega}{\delta\rho(z')} \overset{!}{=} 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{f_0'(\rho(z)) - \mu - f_2\,\frac{d^2\rho(z)}{dz^2} \overset{!}{=} 0}$$

Euler-Lagrange-Gleichung für dieses Variationsproblem!

Zu lösen unter der Randbedingung

$$\lim \rho(z) \xrightarrow[z \to \infty]{} \rho_G$$
$$\lim \rho(z) \xrightarrow[z \to -\infty]{} \rho_L$$

typische Ansatz für $f_0(\rho(z))$

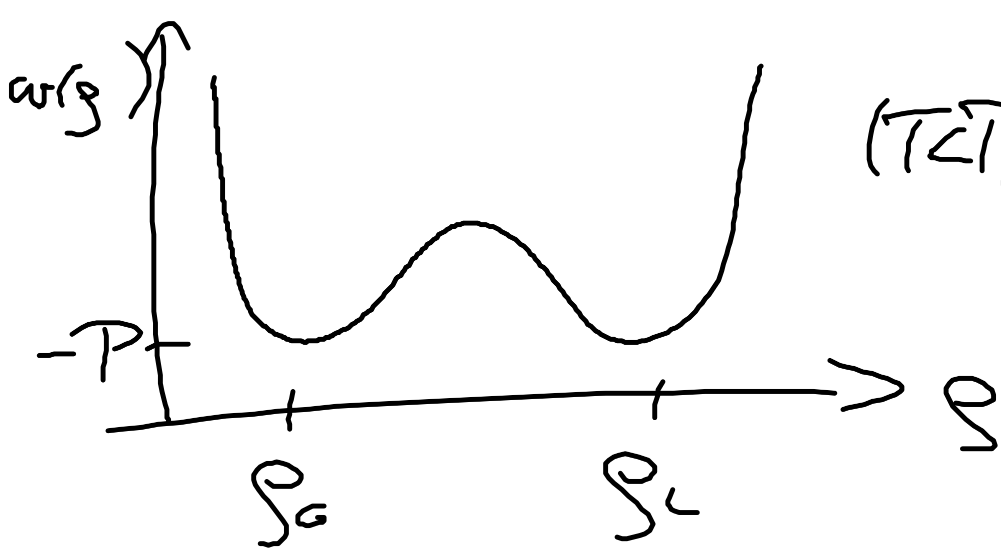
bzw. für

$$\omega(\rho) = f_0(\rho) - \mu\rho$$

Dichte der großkanon. freie Energie unter Vernachlässigung der Inhomogenität

$$= \frac{1}{2}\left((\rho(z) - \rho_L)^2 (\rho(z) - \rho_G)^2\right) - P$$

Ansatz erzeugt im homogenen Fall $(z \to \pm\infty)$ gerade zwei Minima bei $\rho = \rho_G$ und $\rho = \rho_L$



$(T < T_C)$

(mit $P \hat{=}$ Druck)

macht Sinn, da nach Gibbs-Duhem

$$\Omega = -PV$$

$$\omega(\rho) = \frac{\Omega}{V} = -P$$

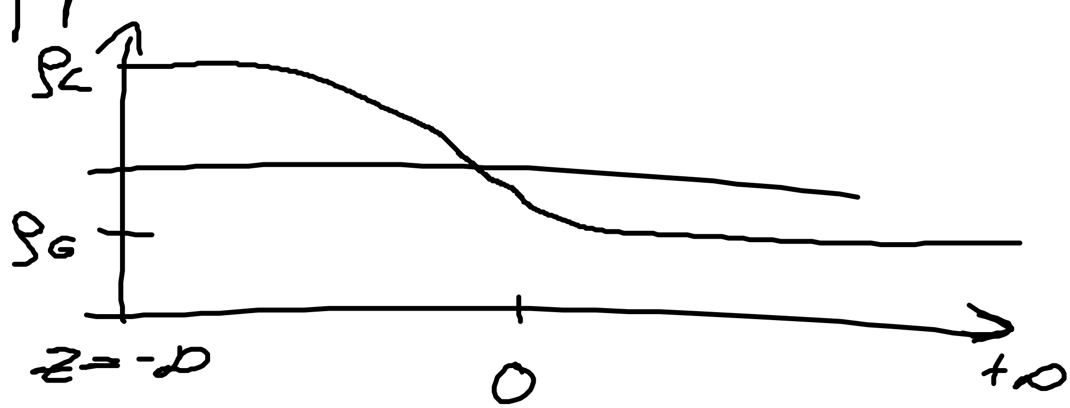
setze $\omega'(\rho) = f_0' - \mu$ in die Euler-Lagrange-Gleichung ein und löse sie

Man erhält:

$$\rho(z) = \frac{1}{2}(\rho_L + \rho_G) - \frac{1}{2}(\rho_L - \rho_G)\tanh\left(\frac{z}{2d}\right)$$

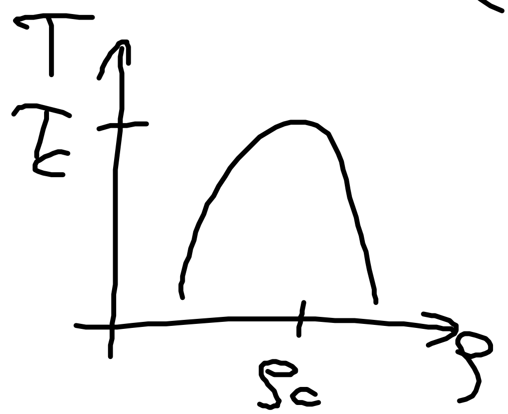
$$\text{mit } d = \sqrt{f_2}\,\frac{1}{\rho_L - \rho_G}$$

graphisch



man interpretiert in diesem Kontext die Größe d als Dicke der Grenzschicht

beachte: $\rho_L - \rho_G$ verschwindet für $T \to T_c$



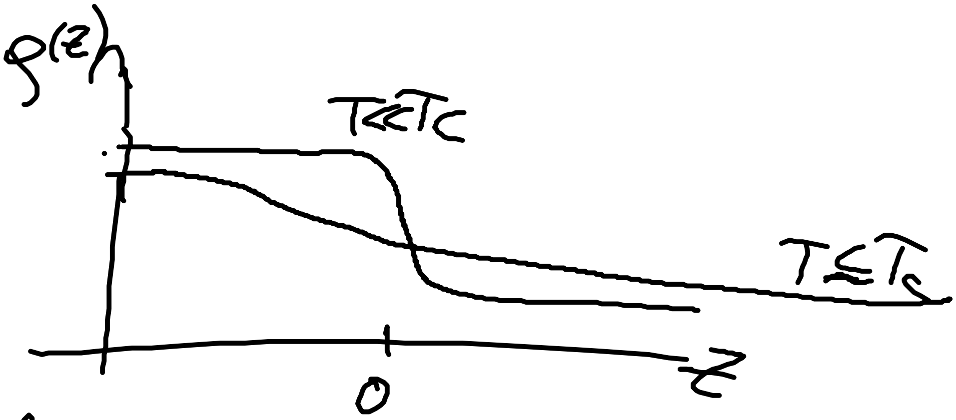
benutze Mean-Field-Resultat

$$\rho_L - \rho_G \sim (T_c - T)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Longrightarrow d \sim \frac{1}{\rho_L - \rho_G} \sim \frac{1}{(T_c - T)^{\frac{1}{2}}}$$

Bei Annäherung an den kritischen Punkt divergiert die Dicke der Grenzschicht

$\longleftrightarrow$ $\rho(z)$ wird zu einer Konstante

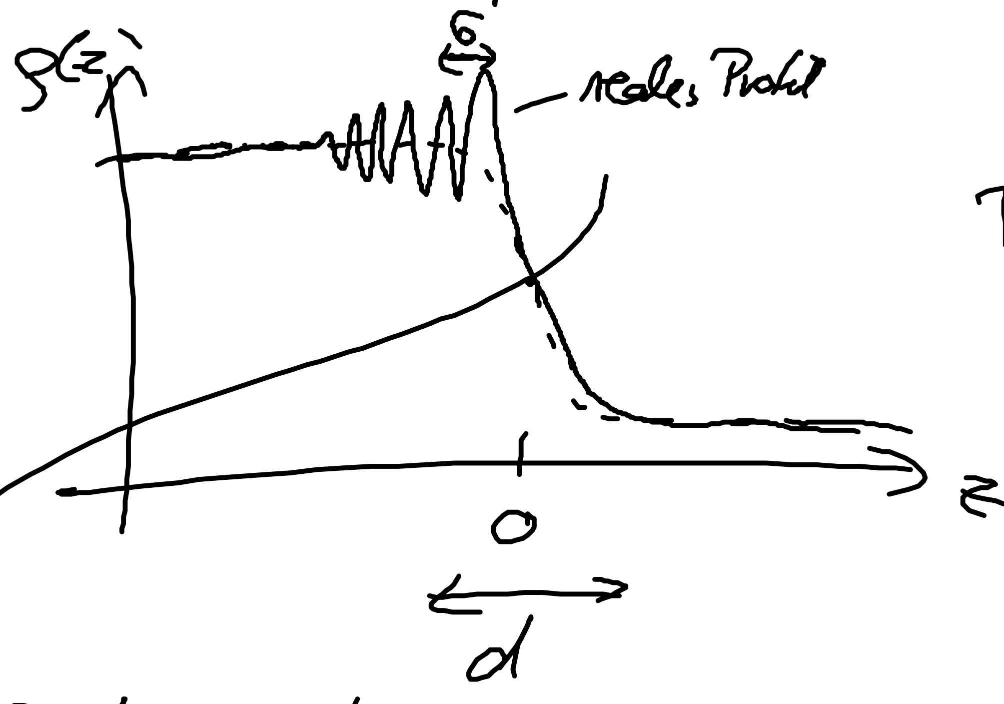


Bemerkung:

Die einfache Form, für $\rho(z)$, die die Ginzburg-Landau-Theorie vorhersagt, ist nicht ganz richtig!

Ergebnis $\rho(z) \sim \tanh\left(\frac{z}{2d}\right)$

vernachlässigt die mikroskop. Strukturierung der Teilchen an der Grenzfläche



→ Oszillationen mit einer Wellenlänge von ca. einem Teilchendurchmesser!

Diese Oszillationen erleichtern

einen Schichtenbildung der Teilchen

an der Grenzfläche!