

Wh:

Landau:

$$F = a + \frac{b}{2} m^2 + \frac{c}{4} m^4 + \frac{d}{6} m^6$$

$$b = b_0 (T - T_C)$$

Ginzburg-Landau:

$$F = \int dx f(x) \quad \text{Dichte der freien Energie}$$

$$f(x) = \left(a(x) + \frac{b(T)}{2} m^2(x) + \frac{c(T)}{4} m^4(x) - m(x) h(x) + \frac{f}{2} (\nabla m(x))^2 \right)$$

externes Feld

Bemerkungen

- Die freie Energie-Dichte enthält $(\nabla m)^2$ statt ∇m , da F ein Skalar sein muß!

• Die Ginzburg-Landau-Entwicklung setzt voraus, dass sich $m(r)$ nur langsam mit r ändert!

§ Ansätze können auch höhere Ableitungen sowie Nicht-lokale Terme vor!
(d.h. Nonlocalität)

• Typischerweise ist der Verlust $g > 0$
(zu $(\nabla m)^2$)

→ Die freie Energie erhält sich also dadurch, dass die Magnetisierung inhomogen ist!

• Genauso wie bei der homogenen Version (d.h. Landau-Ansatz) wird angenommen, dass sich die Verlustanteile „homogen“ am Phasenübergang verhalten

$$\begin{aligned} \text{z.B. } b(T) &= b_0(T - T_c) \\ c(T) &= \text{const} \\ d(T) &= \text{const} \end{aligned}$$

— und dass der Ordnungsparameter „klein“ ist bei Phasenübergang (bei vielen Phasenübergängen & Ordnung ist das faktisch nicht erfüllt!)

Bestimmung des Ordnungsparameters
im Gleichgewicht.

Erinnerung homogene Fall:

$$\frac{df}{dm} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \text{Selbstkonsistenzgleichung für } m$$

(z.B. Ising)

Ginzburg-Landau:

$$F = \int dx \left(a + \frac{b}{2} m^2(x) + \frac{c}{4} m^4(x) - m(x) h(x) + \frac{g}{2} (\nabla m(x))^2 \right)$$

$$\frac{\delta F}{\delta m(x')} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{Variationsableitung}$$

Durchführung:

$$\frac{\delta F}{\delta m(x')} = \int dx \left(a \frac{\delta}{\delta m(x')} + \frac{b}{2} \frac{d m^2(x)}{d m(x')} \right)$$

$$\textcircled{*} \quad + \frac{c}{4} \frac{d m^4(x)}{d m(x')} - h(x) \frac{d m(x)}{d m(x')} + \frac{g}{2} \frac{d (\nabla m(x))^2}{d m(x')} \stackrel{!}{=} 0$$

Für die ersten Terme im Integral benutzen wir:

$$\frac{d g(m(\underline{r}))}{d m(\underline{r}')} = g' \frac{d m(\underline{r})}{d m(\underline{r}')} = g' d(\underline{r} - \underline{r}')$$

↑
Ableitung von g nach m

$$0 = b m(\underline{r}') + c m^3(\underline{r}') - h(\underline{r}') + g \frac{1}{d m(\underline{r}')} \int d\underline{r} \nabla m(\underline{r}) \cdot d \nabla m(\underline{r})$$

benutze =

$$\nabla m(\underline{r}) d \nabla m(\underline{r}) = \nabla m(\underline{r}) \cdot \nabla d m(\underline{r}) \quad \text{Vertauschung der Ableitungen}$$

$$= \nabla \cdot (\nabla m(\underline{r}) \cdot d m(\underline{r})) - d m(\underline{r}) \cdot \Delta m(\underline{r})$$

$$\nabla (A \cdot \varphi) = \nabla \cdot A \cdot \varphi + A \cdot \nabla \varphi \quad \text{mit } A = \nabla \varphi \text{ und } \varphi = d m(\underline{r})$$

benutze Gauß'sche Integralsatz

$$\int dr \nabla \cdot (\nabla m(r) \delta m(r))$$

$$\downarrow$$

$$= \int_{F_V} dF \nabla m(r) \delta m(r) = 0$$

benutze $\delta m(r) = 0$
auf dem Rand

betrachte schließglied

$$-\frac{1}{\delta m(r')} \int dr \delta m(r) \Delta m(r) = - \int dr \frac{\delta m(r)}{\delta m(r')} \Delta m(r)$$

$$= - \Delta m(r')$$

Einsetzen in die Variationsgleichung =

Gleichgewichtsbedingung für die
Magnetstrix

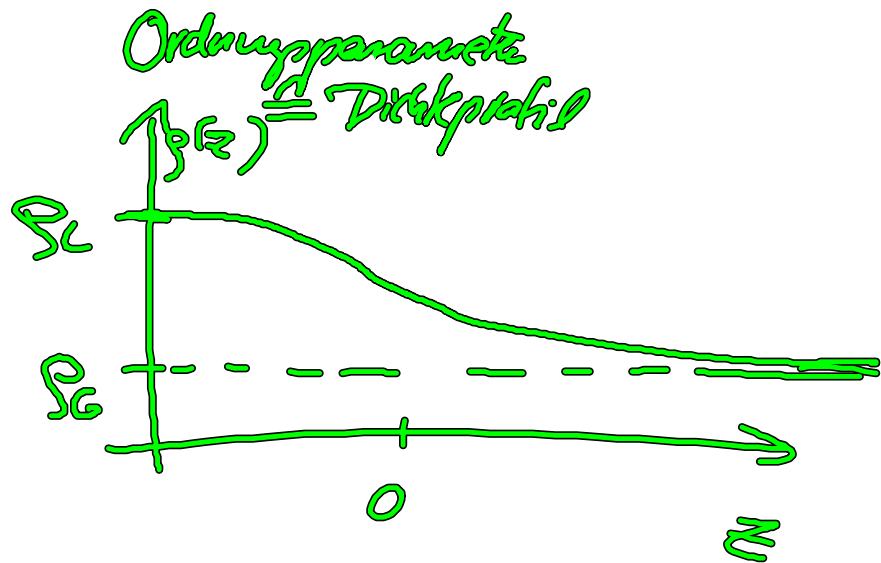
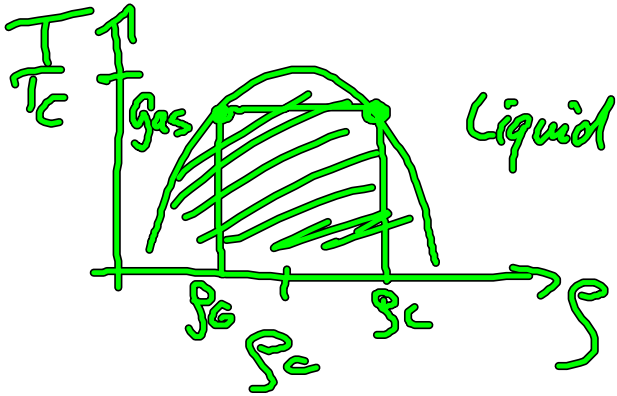
$$0 = b m(r) + c m^3(r)$$

$$- h(r) - g \Delta m(r)$$

(direkte Folgerung aus $\frac{\delta F}{\delta m(r)} = 0$)

Anwendung des Ginzburg-Landau-Funktionals

→ Grenzfläche zwischen einer Gas und einer Flüssigkeit für Temperaturen dicht unterhalb T_c !



$$\lim_{z \rightarrow \infty} \phi(z) = \phi_G$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \phi(z) = \phi_c$$

$$T \rightarrow \phi$$

Grenzflächen-Trenn-
Energie

Ginzburg-Landau - Ansatz

$$\Omega = \int_{-D}^D dz \left(f_0(\rho(z)) + \frac{f_2}{2} \left(\frac{d\rho(z)}{dz} \right)^2 - \mu \rho(z) \right)$$

enthält Potenzen von $\rho(z)$, aber keine Ableitungen
 enthält den Term $(\rho_m)^2$ in einer Dimension!
 "Feldbetrag"

Dichteprofil $\rho(z)$ im Gleichgewicht:

$$\frac{\delta \Omega}{\delta \rho(z')} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \left[f_0(\rho(z)) - \mu - \frac{f_2}{2} \frac{d^2 \rho(z)}{dz^2} \right] \stackrel{!}{=} 0$$

Euler-Lagrange-Gleichung für dieses Variationsproblem.

Zu lösen unter der Randbedingung

$$\lim_{p(z) \rightarrow \pm\infty} p(z) = p_0$$
$$\lim_{p(z) \rightarrow \pm\infty} p(z) = p_c$$

typische Ansatz für $f_0(p(z))$

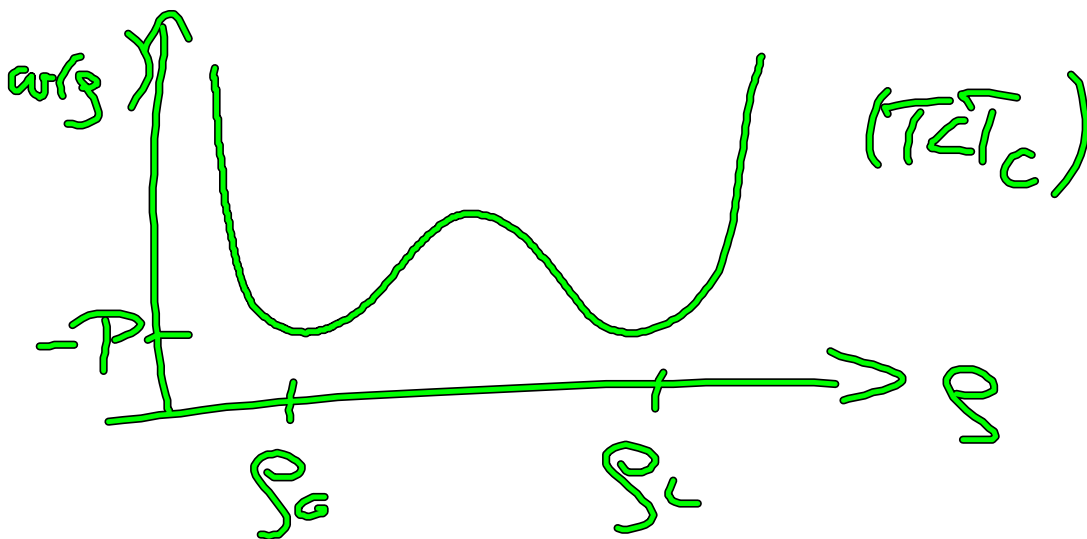
bzw. für

$$w(p) = f_0(p) - \mu p$$

Dies ist die
Grafik von $w(p)$ unter
Veranschaulichung
der Inhomogenität

$$= \frac{1}{2} (p(z) - p_c)^2 (p(z) - p_0)^2 - P$$

Ansatz erzeugt im homogenen Fall ($z \rightarrow \pm\infty$)
gerade zwei Minima bei $p = p_0$ und $p = p_c$



(mit $P = \text{Druck}$)

macht Sinn, da nach Gibbs-Duhem

$$d\mu = -P dV$$

$$w(\rho) = \frac{\mu}{V} = -P$$

Setze $w(\rho) = f_0' - \mu$ in die Euler-Graze-Gleichung ein und löse sie

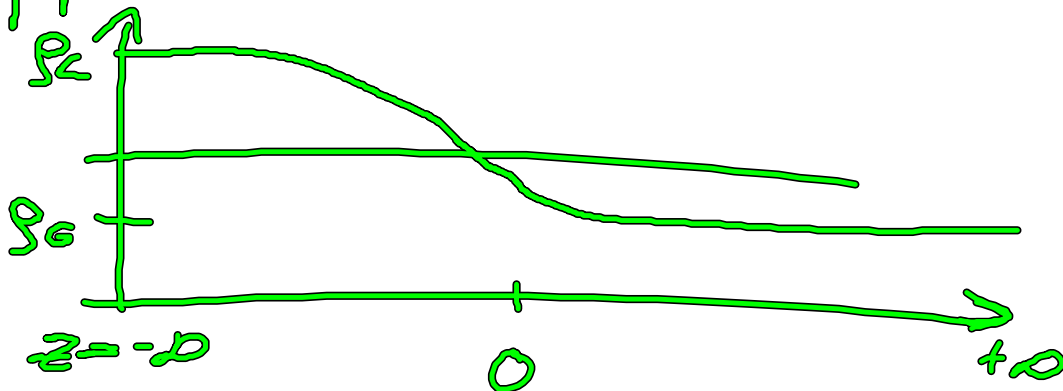
Man erhält:

$$p(z) = \frac{1}{2} (\rho_L + \rho_G)$$

$$- \frac{1}{2} (\rho_L - \rho_G) \tanh\left(\frac{z}{2d}\right)$$

mit $d = \sqrt{\frac{f_2}{\rho_L - \rho_G}}$

graphisch



Man interpretiert in diesem Kontext die Größe d als Dicke der Grenzschicht

beachte: $\rho_L - \rho_G$ verschwindet $k_a - T \rightarrow T_c$

benutze Near-Critical-Resultat

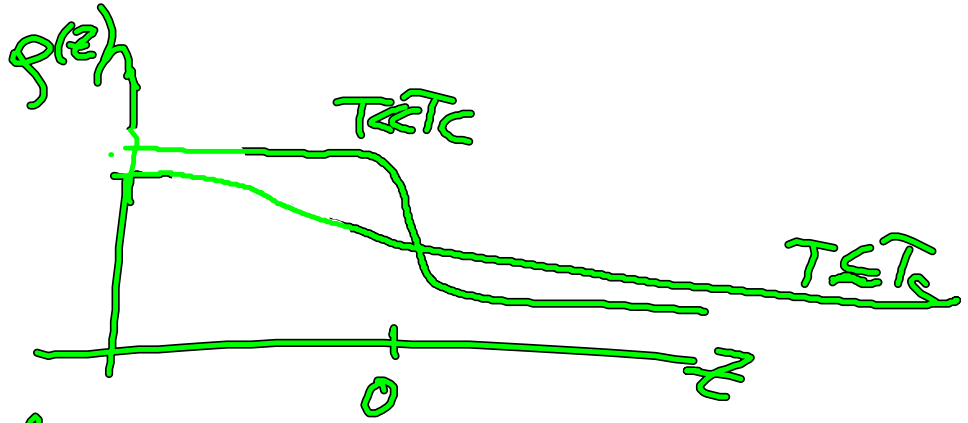
$$\rho_L - \rho_G \sim (T_c - T)^{\frac{1}{2}}$$



$$\Rightarrow d \sim \frac{1}{\rho_L - \rho_G} \sim \frac{1}{(T_c - T)^{\frac{1}{2}}}$$

Bei Annäherung an den kritischen Punkt divergiert die Dicke der Grenzschicht

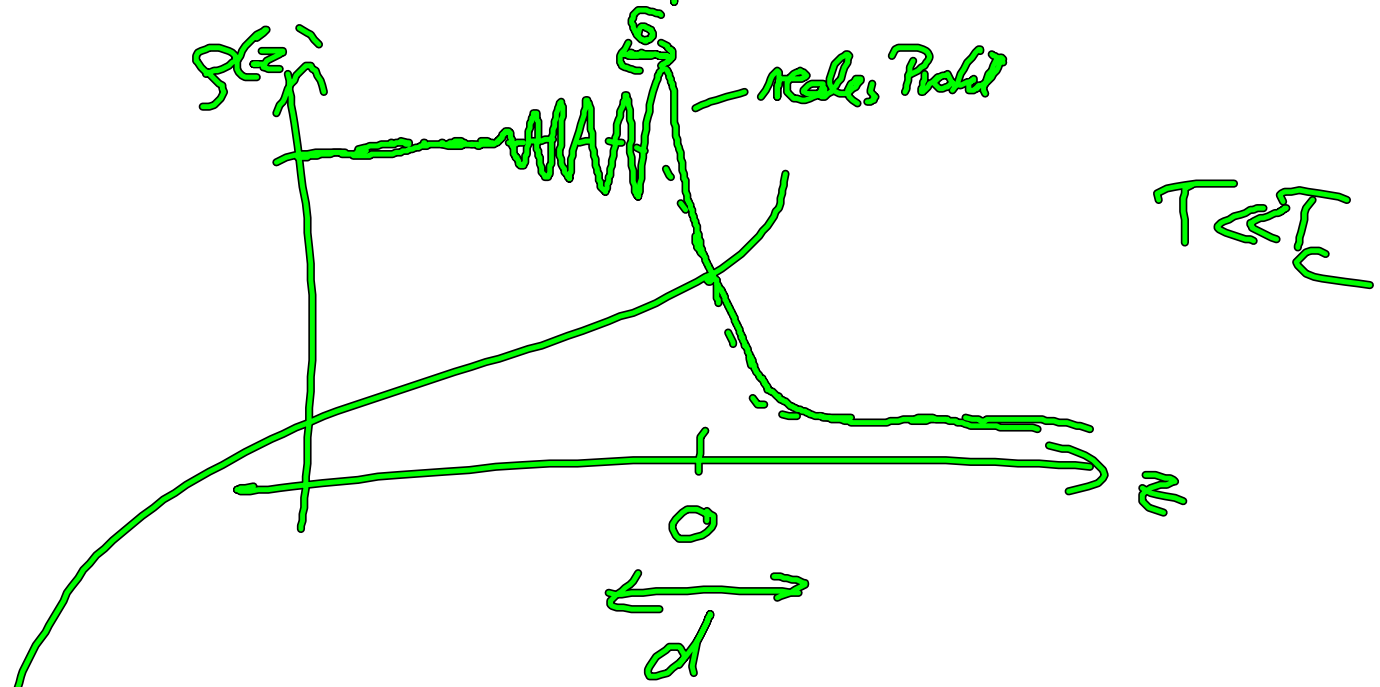
$\Leftrightarrow \rho(z)$ wird zu einer Konstante



Bemerkung:
Die einfache Form, die die Ginzburg-Landau-Theorie vorhersagt, ist nicht ganz richtig!

Ergebnis $\rho(z) \sim \tan\left(\frac{z}{2d}\right)$

vernachlässigt die mikroskop. Struktur der Teilchen an der Grenzfläche



→ Oszillationen mit einer Wellenlänge von ca. einem Teilchen Durchmesser!

Dieser Ozeanische Kollisions
eine Schichtbildung der Tullde
an der Grenzfläche!