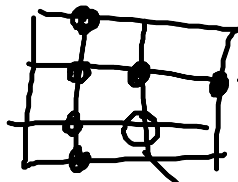
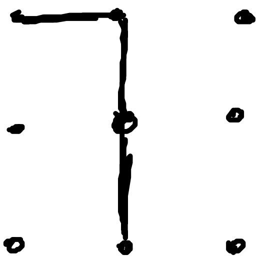
Wh.

„site-percolation":



bond-percolation:



Wahrsch., daß ein Platz besetzt ist bzw. eine Bindung ausgebildet wird

$p < p_c$: „isolierende Phase"

$p > p_c$: „leitende Phase"

p_c: Perkolationsschwelle

Ordnungsparameter

P_∞ : Wahrsch. für das Auftreten eines unendlichen ~~Sta~~ Clusters

$P_\infty = 0$, $p < p_c$

$P_\infty = 1$, $p > p_c$

~~cf~~ Potenzgesetze:

$$P_\infty = (p-p_c)^\beta$$

Korrelationslänge $\rightarrow \xi = |p-p_c|^{-\nu}$

$$S \sim |p-p_c|^{-\gamma}$$

mittlere Zahl von Plätzen in einem endlichen Cluster

Universalität

Univ. Exponenten hängen nur ab von der Raum-Dimension des Gitters!

VI.4. Perkolation in einer Dimension

1-d Gitter:

Beachte:

Ein unendlich großer (d.h. systemüberspannender) Cluster kann nur dann vorliegen, wenn wirklich alle Plätze besetzt sind

$$\rightarrow p_c = 1$$

Folgerung: In diesem Modell kann ~~...~~ nur die isolierende Phase untersucht werden!

betrachte die Größe S

$\downarrow$

mittlere Zahl von Plätzen in einem endl. Cluster

$\Leftrightarrow$ mittlere Größe eines Clusters

Es gilt: $S = \sum_{s=1}^{\infty} s \overset{(\text{mal})}{\times}$ Wahrsch. für das ~~Auft~~ Auftreten eines Clusters der Größe s

$$= \ldots\ldots = \frac{1}{p} \sum_{s=1}^{\infty} s^2 n_s$$

mit n_s: Zahl der Cluster der Größe s relativ zur Zahl aller Gitterplätze (N)

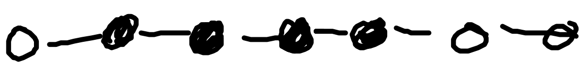
Frage: Was ist hier n_s?

<u>Ausgangspunkt:</u>

Wahrsch., daß ein Platz einem Cluster der Größe s angehört $\hat{=}\ s\, n_s$

$$= p^s \underbrace{(1-p)^2}_{\text{Wahrsch., daß die rechts und links angrenzende Plätze unbesetzt sind}} \cdot s$$

Wahrsch. für s aufeinanderfolgende, besetzte Plätze



(z.B. $s=4$)

Durch Vergleich ergibt sich:

$$n_s = p^s (1-p)^2$$

$$S = \frac{1}{p} \sum_{s=1}^{\infty} s^2 n_s$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{s=1}^{\infty} s^2 p^s (1-p)^2 = \frac{(1-p)^2}{p} \sum_{s=1}^{\infty} s^2 p^s$$

$$= \frac{(1-p)^2}{p} \left(p \frac{d}{dp}\right)^2 \underbrace{\sum_{s=1}^{\infty} p^s}_{\text{geometrische Reihe}}$$

Wir betrachten $p < p_c = 1$

$$= \frac{(1-p)^2}{p} \left(p \frac{d}{dp}\right)^2 \left(\frac{p}{1-p}\right)$$

$$S = \frac{(1-p)^2}{p}\left(p\frac{d}{dp}\right)\left(p\,\frac{(1-p)-p(-1)}{(1-p)^2}\right)$$

$$= \dots = \frac{1+p}{1-p}$$

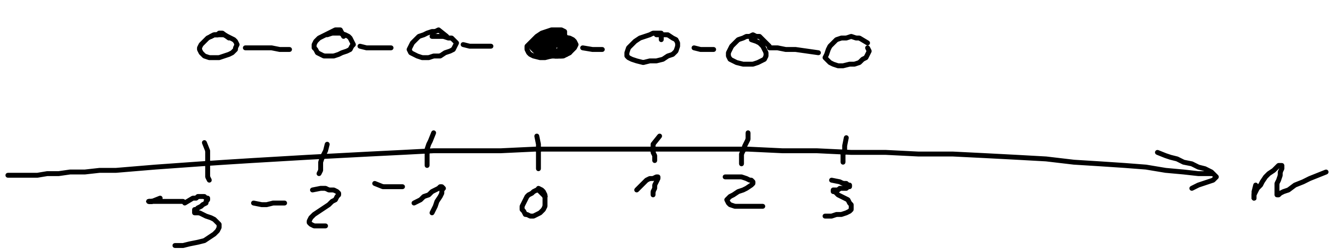
Erinnerung: $p_c = 1$

$$\Rightarrow S = \frac{1+p}{(p_c - p)} \sim (p_c - p)^{-1}$$

mittlere Clustergröße!

$$\Rightarrow \gamma = 1 \; !$$

Korrelationsfunktion



Sei der Nullpunkt besetzt

Definieren:

$G(r)$ sei die mittlere Zahl von besetzten Plätzen in der Entfernung r vom betrachteten Platz (Nullpunkt)

$$G(r) = 2\, p^{r}$$

Korrelations-funktion

Wahrsch., daß ~~alle~~ die Plätze zwischen 0 und r besetzt sind

„Entartungsfaktor": kommt daher, daß es in einem 1-dim. Gitter zwei Plätze mit Abstand r vom Bezugspunkt (Nullpunkt) gibt

Über $G(r)$ kann man eine Korrelationslänge wie folgt definieren.
(ξ)

$$\xi^2 = \frac{\sum_{r=1}^{\infty} r^2 g(r)}{\sum_{r=1}^{\infty} g(r)} = \frac{\cancel{A} \sum_{r=1}^{\infty} r^2 p^r}{\cancel{A} \sum_{r=1}^{\infty} p^r}$$

$$= \frac{\left(p\frac{d}{dp}\right)^2 \sum_{r=1}^{\infty} p^r}{\sum_{r=1}^{\infty} p^r} \underset{\text{geometr. Reihe}}{=} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{-1} \left(p\frac{d}{dp}\right)^2 \left(\frac{p}{1-p}\right)$$

$$= \dots = \frac{1+p}{(1-p)^2} = \frac{1+p}{(p_c-p)^2}$$

$$\xi \sim (p_c - p)^{-\nu}$$

mit $\nu = 1$!

<u>Clustergröße-Verteilung</u>

* n_s : Die Häufigkeit in dem System einen endlichen Cluster der Größe s zu finden. ($s = 1, \dots \infty$)

* $s n_s$: W. eine zufällige herausgegriffene Teilchen aus einem Cluster endl. Clustern der Größe s zu finden

$$\Rightarrow S = \frac{\sum_s s^2 n_s}{\sum_s s n_s}$$

* Die Rolle von p ($\hat{=}$ W. eine Besetzung eines besetzten Ortes) übernimmt jetzt die (Packungs-)Dichte η

→ 1. Frage:

Gibt es einen Perkolationsübergang, d.h. η_c

→ 2. Wie sieht das asymp. Verhalten von n_s in der Nähe von η_c aus?

$(\eta < \eta_c)$

<u>scaling-assumption</u>

$$n_s(\eta) = s^{-\tau} f[(\eta - \eta_c)\, s^{\sigma}] \; ; \; (p \to p_c,\ s \to \infty)$$

f: beliebig, hinreichend diffb. Funktion.

$$n_s(\eta \to \eta_c) \sim s^{-\tau}$$

Warum sind σ u τ interessant?

→ Zusammenhang mit den kritischen Größen des Systems:

$$\beta = \frac{\tau - 2}{\sigma} \qquad \left(P_\infty = \begin{cases} 0, & p < p_c \\ (p-p_c)^{\beta} & p > p_c \end{cases} \right)$$

$$\gamma = \frac{3 - \tau}{\sigma} \qquad \left(S \sim (p - p_c)^{-\gamma} \right)$$

z.B.: Meanfield: $\tau = \frac{7}{3} \approx 2{,}33$

2D Ising: $\tau \sim 2.02$

3D Ising: $\tau \sim 2.21$