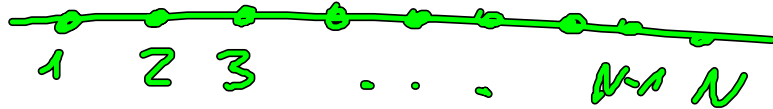


Enddimensionales Ising-Modell:

Exakte Lösung

Ising 1925

Betrachte 1-dim. Gitter $\hat{=}$ Kette mit N Plätzen



$$H = -J \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1} - h \sum_{i=1}^N s_i$$

$$s_{N+1} = s_1$$

d.h. „periodische Randbed.“
 \Leftrightarrow geschlossene Spinkette!

Vorteil der geschlossenen Kette gegenüber
der sog. offenen Spinkette

\rightarrow Translationsinvarianz

\Rightarrow Jeder Platz in der geschlossenen Kette ist
gleichberechtigt

Wir können gleiche Annahme

$$\langle s_1 \rangle = \langle s_2 \rangle = \dots = \langle s_N \rangle = \langle s \rangle = m$$

Magnetisierung
pro Gitterplatz!

Kanonische Zustandssumme

$$Z_N = \sum_{\{s\}} e^{\beta J \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1} + \beta h \sum_{i=1}^N s_i}$$

$$\text{mit } \sum_{\{s\}} \dots = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \dots \sum_{s_N=\pm 1} \dots$$

$$= \sum_{\{s\}} e^{\beta J s_1 s_2 + \beta h s_1 + \beta J s_2 s_3 + \beta h s_2 + \dots \dots}$$

führe ein:

$$\tilde{V}(s_\alpha, s_\beta) = e^{\beta J s_\alpha s_\beta + \frac{\beta h}{2} (s_\alpha + s_\beta)}$$

$\alpha, \beta = 1, \dots, N$

Dann kann man schreiben.

$$Z_N = \sum_{\{s\}} \tilde{V}(s_1, s_2) \tilde{V}(s_2, s_3) \dots \dots \tilde{V}(s_{N-1}, s_N) \tilde{V}(s_N, s_1)$$

~~betrachte~~ beachte Symmetrie. $\tilde{V}(s_2, s_1) = \tilde{V}(s_1, s_2)$

aufßerdem: $s_2 = \pm 1$, $s_1 = \pm 1$

→ Die Funktion \tilde{V} kann insgesamt
4 Werte annehmen!

Führe ein

$$\underline{V} = \begin{pmatrix} \tilde{V}(1,1) & \tilde{V}(1,-1) \\ \tilde{V}(-1,1) & \tilde{V}(-1,-1) \end{pmatrix}$$

2x2
Matrix

einsetzen der Def. von \tilde{V}

$$\rightarrow \underline{V} = \begin{pmatrix} e^{\beta J + h} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta J - h} \end{pmatrix}$$

„Transfer-Matrix“

Damit kann man schreiben

$$Z_N = \sum_{\{s\}} \hat{V}(s_1, s_2) \dots \hat{V}(s_N, s_1)$$

$$= \sum_{s_1 = \pm 1} \left(\underbrace{\sum_{s_2 = \pm 1} \dots \sum_{s_N = \pm 1} \hat{V}(s_1, s_2) \dots \hat{V}(s_N, s_1)}_{= V^N} \right)$$

sehr große
ex. Matrix

$$= \underset{\substack{\rightarrow \\ \text{spur}}}{\text{Tr}} V \stackrel{=}{=} V^N$$

Explizit für $N=2$

$$Z_2 = \sum_{s_1 = \pm 1} \sum_{s_2 = \pm 1} \hat{V}(s_1, s_2) \hat{V}(s_2, s_1)$$

$$= e^{\beta J + \beta h} \cdot e^{\beta J + \beta h}$$

$$s_1 = s_2 = 1$$

$$+ e^{\beta J - \beta h} \cdot e^{\beta J - \beta h}$$

$$s_1 = s_2 = -1$$

$$+ e^{-\beta J + 0} \cdot e^{-\beta J + 0}$$

$$s_1 = 1, s_2 = -1$$

$$+ e^{-\beta J + 0} \cdot e^{-\beta J + 0}$$

$$s_1 = -1, s_2 = 1$$

$$= \left(e^{\beta J + \beta h} \right)^2 + \left(e^{\beta J - \beta h} \right)^2 + \left(e^{-\beta J} \right)^2 + \left(e^{-\beta J} \right)^2$$

⊗

andersetzt.

$$\underline{V}^2 = \begin{pmatrix} (e^{\beta J + \beta h})^2 & & \\ & (e^{-\beta J})^2 & \\ & & (e^{\beta J - \beta h})^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} e^{\beta J + \beta h} & e^{-\beta J} & e^{\beta J - \beta h} \\ & & \\ & & \end{matrix}$$

Symmetr.

$$\Rightarrow \text{Tr } \underline{V}^2 = (e^{\beta J + \beta h})^2 + (e^{-\beta J})^2 + (e^{\beta J - \beta h})^2$$

also gilt tatsachlich. !

$$Z_N = \text{Tr } \underline{V}^N$$

~~F~~ Daraus freie Energie: $F = -k_B T \ln Z_N = -k_B T \ln \text{Tr } \underline{V}^N$

Zur Auswertung von F diagonalisieren

Wir die Matrix \underline{V}

$$\underline{V} = \underline{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \underline{A}^{-1}$$

λ_1, λ_2 Eigenwerte
 $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ Eigenvektoren

$$\text{mit } \underline{A} \underline{A}^{-1} = \underline{1}$$

$$\text{und } \underline{V} \underline{x}_1 = \lambda_1 \underline{x}_1$$

$$\underline{V} \underline{x}_2 = \lambda_2 \underline{x}_2$$

benutze dabei:

Damit

$$Z_k = \text{Tr} \underline{V}^N = \text{Tr} \underline{A}^{-1} \underline{A} \left(\begin{array}{cc} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{array} \right)^N \underline{A}^{-1}$$

Zykl. Invarianz der Spur:

$$Z_k = \text{Tr} \underbrace{\underline{A}^{-1} \underline{A}}_1 \left(\begin{array}{cc} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{array} \right)^N$$

$$= \text{Tr} \left(\begin{array}{cc} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{array} \right)^N = \text{Tr} \left(\begin{array}{cc} \lambda_1^N & 0 \\ 0 & \lambda_2^N \end{array} \right)$$

$$Z_k = \lambda_1^N + \lambda_2^N$$

$$\lambda_{1,2} = e^{\beta J} \cosh(\beta h) \pm \sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2 \beta h + e^{-2\beta J}}$$

betrachte speziell $h \rightarrow 0$

$$\lambda_{1,2}(h \rightarrow 0) = e^{\beta J} \pm e^{-\beta J}$$

$$F = -k_B T \ln(\lambda_1^N + \lambda_2^N)$$

$$= -k_B T \ln \left(\lambda_1^N \cdot \left(1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^N \right) \right)$$

$$= -k_B T \ln \lambda_1^N - k_B T \ln \left(1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^N \right)$$

Es gilt immer: $\lambda_1 > \lambda_2 \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^N = 0$$

Für $N \rightarrow \infty$ haben wir also:

$$\frac{F}{N} = f = -k_B T \ln \lambda_1$$

↑
größte Eigenwert der
Transfer-Matrix

$$= -k_B T \ln \left[e^{\beta J} \cosh(\beta h) + \sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2 \beta h + e^{-2\beta J}} \right]$$

$$= f(h, T)$$

Daraus die Magnetisierung

$$M = \langle S \rangle$$

$$\vec{M} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle S_i \rangle$$

Translationsinvariant

$$= \frac{1}{N} \frac{1}{Z_N} \sum_{\{S\}} e^{-\beta H} \left(\sum_{i=1}^N S_i \right)$$

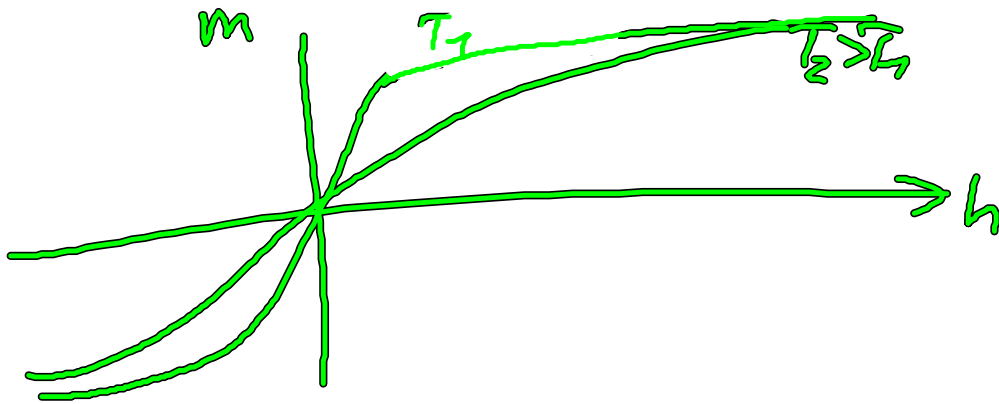
$$\beta^{-1} \frac{\partial}{\partial h} \sum_{\{S\}} e^{-\beta H} \left(H = -J \sum_{i=1}^N S_i S_{i+1} - h \sum_{i=1}^N S_i \right)$$

$$= \frac{1}{N} k_B T \frac{\partial}{\partial h} \ln Z_N = -\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial h} F(h, T) \\ = -\frac{\partial}{\partial h} f(h, T)$$

Dies Ableitung von $f(h, T)$ nach h ergibt sich

$$M = m(h, T)$$

$$= \frac{e^{\beta J} \sinh(\beta h)}{\sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2(\beta h) + e^{-2\beta J}}}$$



betrachte $h \rightarrow 0$ (endliche Temperatur $T > 0$)

$$\sinh(\beta h) \approx \beta h \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow m(h \rightarrow 0, T) = 0 \text{ für alle } T > 0!$$



d.h. ES gibt keine spontane Magnetisierung
($m \neq 0$ für $h \rightarrow 0$)

bei $T > 0$

— im Unterschied zu Vorhersage der Meanfield-Theorie!

andere Seite

betrachte Mg Magnetsatz in Feld ($h \neq 0$)
für kleine Temperaturen

$$\text{Ausgangspunkt: } m(h, T) = \frac{e^{\beta J} \sinh(\beta h)}{\sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2(\beta h) + e^{-2\beta J}}}$$

$$T \rightarrow 0 \iff \beta J \rightarrow \infty$$

$$\implies m(h, T \rightarrow 0) \approx \frac{e^{\beta J} \sinh(\beta h)}{\sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2(\beta h)}} = 1$$

Für $T \rightarrow 0$, $h \neq 0$ ist die Magnetsatz endlich,
und zwar unabhängig von Feld

„auch ein noch so kleines Feld erzeugt eine
Ordnung bei $T \rightarrow 0$!“

Spezialweise:

„Das 1-dim. Ising Modell hat
 eine Phasenübergang bei $T=0$ “ (und $h \rightarrow 0$)
 (d.h. im Grundzustand)

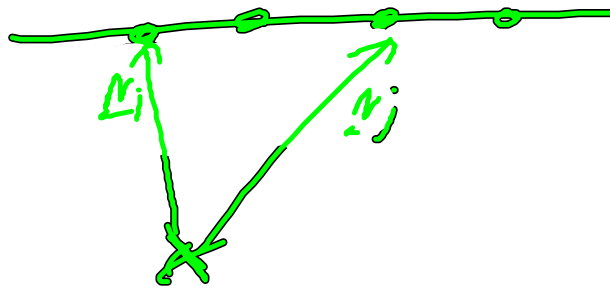
Diese Vorstellung kann man auch mathematisch
 über Betrachtung der Korrelationslänge

definiert:

$$g_{ij} = \langle S_i S_j \rangle - \langle S \rangle \langle S_j \rangle$$

i, j Gitterplätze
 ~~i, j~~

$$r = |r_i - r_j|$$



man erwartet im translationsinvarianten System

$$g_{ij} = g(|r_i - r_j|) = g(r)$$

$$= e^{-N/r} \text{ Korrelationslänge}$$

exakter Ausdruck:

$$g_{ij} = g(r) = \sin^2 z\phi \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^N \quad \text{mit } r = i-j$$

$$z\phi = \operatorname{arccot} e^{\frac{2\beta J}{\lambda_1, \lambda_2} \sinh(\beta h)}$$

Eigenwert der Transfer Matrix

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$$

betrachte $g(r)$ für große Abstände r

$$\Rightarrow \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^N \text{ wird klein}$$

\Rightarrow Linearisierung des Sinus:

$$\begin{aligned} g(r) &\sim z\phi \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^N = z\phi e^{\ln \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^N} \\ &= z\phi e^{N \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \\ &= z\phi e^{-N \ln \lambda_1 / \lambda_2} \\ &\doteq A e^{-N/\xi} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[\xi = \frac{1}{\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right]$$

Betrachte gleich den folgenden Fall
 $h \rightarrow 0$

$$h \rightarrow 0 : \lambda_{1,2} = e^{\beta J} \pm e^{-\beta J}$$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} &= \frac{e^{\beta J} + e^{-\beta J}}{e^{\beta J} - e^{-\beta J}} \\ &= \frac{e^{\beta J} (1 + e^{-2\beta J})}{e^{\beta J} (1 - e^{-2\beta J})} \end{aligned}$$

Ziel:

$$T \rightarrow 0, \text{ d.h. } \beta J \rightarrow \infty : \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1$$

$$\Rightarrow \int \rightarrow \infty$$

$$\text{für } T \rightarrow 0 \quad \text{bei } \cancel{h=0} \quad h=0$$