Theoret. Physik VI : Vertiefung (Nichtlineare Dynamik u. Kontrolle)

VL WS 2011/12 E. Schöll, K. Lüdge

Masterstudiengang Physik : Pflichtvorles. TP V/VI (grundlagenorient.)
11 + 10 ECTS
anwend. orientiert : TP V oder TP VI

VL Do + Fr 10:15 – 11:45 EW 203
UE : J. Lehnert
Ergänz. Seminar : Nichtlineare Laserdynamik
Di 16:00 – 17:00 EW 731

- VL kann auch als Wahlpflichtfach (8 SWS, 1 Schein, 12 ECTS) in Diplom- oder Masterstudiengang kombiniert werden mit
  - Spezialvorles. "Synchronization of Nonlinear Systems and Networks" 3233 L525 (Maistrenko, Mi 10–12 EW 229 ab 26.10.)
  - Sem. Nichtlin. Laserdynamik (Di 16–18 EW 731, ohne eig. Vortrag)

http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws1112

Inhalte der VL :

1. Dyn. Systeme
2. Kontrollkonzepte der nichtlin. Dynamik
3. Zeitverzögerte Rückkopplungsverfahren
4. Wechselspiel von Zeitverzögerung und Rauschen
5. Anwendung auf Laser
6. gekoppelte Systeme u. Netzwerke
7. Anwendung auf Neurodynamik

1. Dynamische Systeme u. deterministisches Chaos

Nichtlineare Dynamik

Fragestellungen:

- Langzeitverhalten
- Abhängigkeit von äußeren Parametern (Kontrollpar.)
- Abhängigkeit von kleinen äußeren Störungen
- Abhängigkeiten von Ungenauigkeit in den Anfangsbedingungen
- globale Aussagen über den dynamischen Fluss,
  d.h. die Gesamtheit aller Bahnen
- geordnete oder ungeordnete (chaot.) Lösungen

Qualitative Dynamik: Fluss als Ganzes, Stabilität, topolog. Struktur, Langzeitverhalten

1.1 Vektorfelder als dynam. Systeme

Dynamik vieler Systeme lässt sich als System von (nichtlin.) Dgln. 1. Ordnung formulieren:

$$\boxed{\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t), t)}$$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ dyn. Var.

$\underline{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld

determinist. dyn. System

z.B. Newton'sche Beweg.gl. mit Reibung

$$\ddot{y} + \underbrace{f_1(y,t)}_{\text{Reibung}}\dot{y} + \underbrace{f_2(y,t)}_{\text{Kraft}} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &:= y \\ x_2 &:= \dot{y} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -f_1 x_2 - f_2 \end{aligned}$$

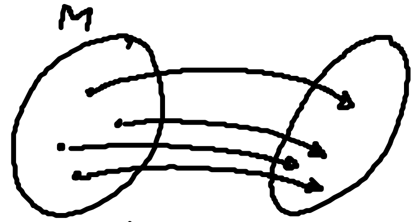
speziell Hamilton'sche Systeme:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = q \\ x_2 = p \end{array}\right\} \quad \dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad H(q,p) \text{ Hamiltonfkt.}$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

<u>Fluss des Vektorfeldes</u> $\underline{F}$ auf der Mannigfaltigkeit M:
(Phasenraum, z.B. $\mathbb{R}^n$)

$$\phi : M \times \mathbb{R}_t \to M$$

mit $\phi(\underline{x}_0, t) = \phi_t(\underline{x}_0)$
$$= \underline{x}(t; \underline{x}_0)$$



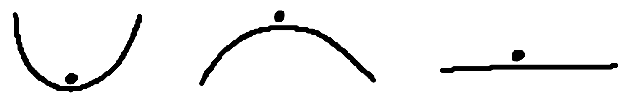
(Gesamtheit der Bahnkurven
= Trajektorien)

<u>Fixpunkt $\underline{x}^*$ des autonomes dyn. System $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$</u>

(stationäre Pkte., Gleichgewichtspkte., singuläre Pkte., krit. Pkte)

$$0 \overset{!}{=} \dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}^*) \Rightarrow \underline{x}^*$$

<u>Stabilität eines Fixpunktes</u>:



Test durch Linearisierung für kleine Auslenkungen

$\delta\underline{x} := \underline{x} - \underline{x}^*$:

$$\boxed{\delta\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)_{x^*} \delta x_k}$$

$$\boxed{\delta\dot{\underline{x}} = (DF)_* \, \delta\underline{x}} \qquad \text{mit Jacobi-Matrix } DF$$

System von <u>lin.</u> Dgl. mit konst. Koeff.

<u>Lösungsansatz</u> $\quad \delta\underline{x}(t) = \underline{\xi}\, e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda \underline{\xi} = A \underline{\xi}$

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$$

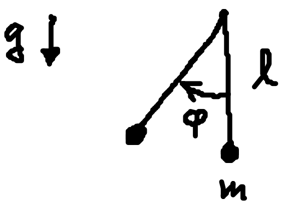
<u>Eigenwertgl.</u>

$$\left.\begin{array}{ll}\lambda_k : & \text{Eigenwerte} \\ \underline{\xi}^{(k)} : & \text{Eigenvektoren}\end{array}\right\} \text{ der Jacobi-Matrix } (DF)_* \equiv A$$

$$\text{allg. Lösung}: \ \delta \underline{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \, \underline{\xi}^{(k)} \, e^{\lambda_k t}$$

(Annahme : keine entarteten Eigenwerte λ_k
c_k durch Anfangsbed. bestimmt)

<u>Beispiele</u> (i) Ebenes Pendel $\quad m l^2 \ddot{\varphi} + m g l \sin\varphi = 0$

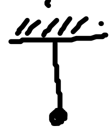


$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \varphi \\ x_2 = p_\varphi = m l^2 \dot{\varphi} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \dfrac{x_2}{m l^2} \\ \dot{x}_2 = -m g l \sin x_1 \end{array}$$

Fixpkte. : $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0 \,, \ x_1 = n\pi \quad (n = 0, 1, \cdots)$

$$\text{Linearisierung} \begin{pmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m l^2} \\ -m g l \cos x_1 & 0 \end{pmatrix}_*}_{A} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

a) $x_1 = x_2 = 0$



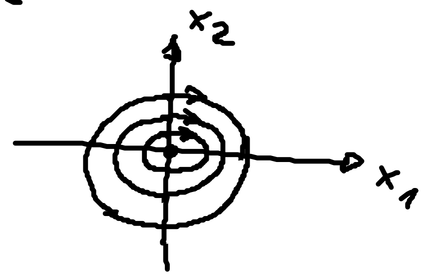
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m l^2} \\ -m g l & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Eigenwerte}: \ \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{m l^2} \\ -m g l & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$$

$$\Rightarrow \ \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}} = \pm i \omega$$

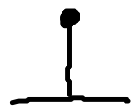
$$\Rightarrow \quad \underline{x}(t) = c_1 \underline{\xi}^{(1)} e^{i\omega t} + c_2 \underline{\xi}^{(2)} e^{-i\omega t}$$

<u>ungedämpfte Schwingungen</u>



<u>Zentrum</u>

b) $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$



„Segway"

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ mgl & 0 \end{pmatrix}$$

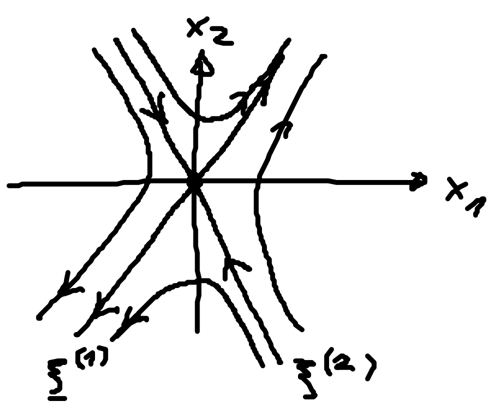
$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 - \frac{g}{l} = 0$$

Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}$

allg. Lösung $\delta\underline{x}(t) = c_1 \underline{\xi}^{(1)} e^{\sqrt{\frac{g}{l}}\,t} + c_2 \underline{\xi}^{(2)} e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}\,t}$

$$\xrightarrow{t \to \infty} \infty$$

<u>instabil</u>
längs Richtung von $\underline{\xi}^{(1)}$



<u>Sattelpkt</u>

NB: Da Matrix A nicht symm. ist, sind die Eigenvektoren i.a. nicht senkrecht zueinander!