

Beispiel für ein dynamisches System:

(ii) Ebenes Pendel mit Reibung

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0$$



$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi \\ x_2 &= ml^2 \dot{\varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{x_2}{ml^2} \\ \dot{x}_2 &= -mgl \sin x_1 - 2\gamma x_2 \end{aligned}$$

Reibung

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

} Fixpunkte. ungerändert

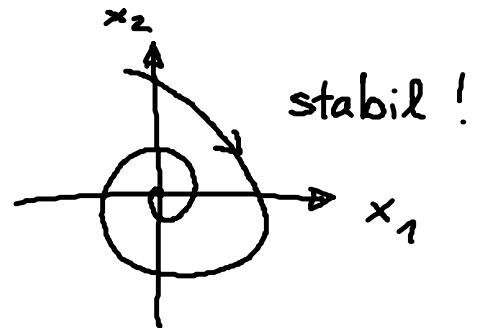
Linearisierung:
$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl \cos x_1 & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

a) $x_1 = x_2 = 0$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl & -2\gamma \end{pmatrix}$$

Eigenwerte: $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \frac{g}{l} = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ (schwache Reibung $\gamma^2 < \omega^2$)

(a) gedämpfte Schwingungen
(schwache Reibung)

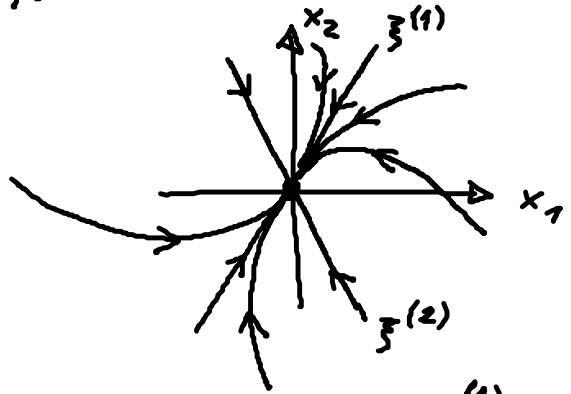


stabiler Fokus

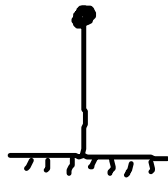
(a₂) aperiodische gedämpfte Bewegung
 (überdämpfte Dsz)

starke Reibung ($\gamma^2 > \omega^2$): $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$

stabiler Knoten



b) $x_1 = \pi, x_2 = 0$



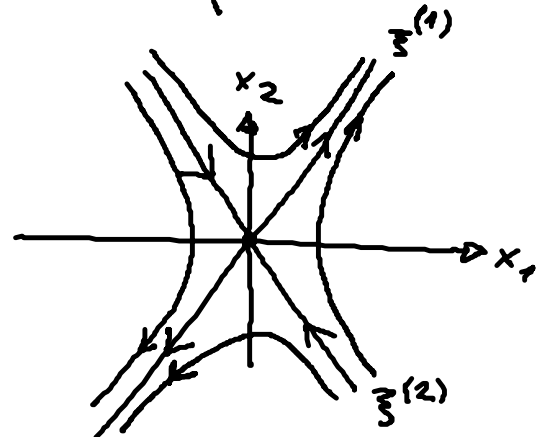
$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda - \omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \underbrace{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}}_{> \gamma}$$

$$\lambda_1 > 0$$

$$\lambda_2 < 0$$

instabil!



Sattelpunkt

1.2 Stabilität und Langzeitverhalten

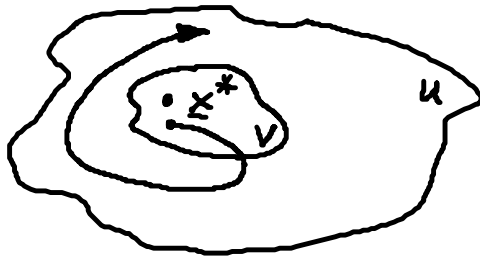
allg. Def. der Stabilität:

Sei \underline{x}^* Fixp. des dynam. Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, t)$

Def.: \underline{x}^* heißt stabil (oder Ljapunov-stabil),

wenn zu jeder Umgebung U von \underline{x}^* eine Umgebung V von \underline{x}^* existiert, so dass

$$\underline{x} \in V \Rightarrow \phi(\underline{x}, t) \in U \quad \forall t \geq 0$$

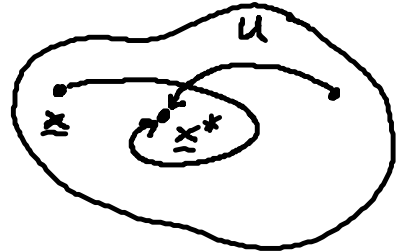


Def.: x^* heißt asymptotisch stabil, wenn zu \underline{x}^* eine Umgebung U ex., so dass

$$\phi(U, t_2) \subset \phi(U, t_1) \subset U$$

für $0 < t_1 < t_2$ und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(\underline{x}, t) = \underline{x}^* \quad \forall \underline{x} \in U$$



(U schrumpft mit wachsendem t auf \underline{x}^* zusammen, d.h. Phasenraumvolumina schrumpfen)

Widerspruch

↔ Liouville'scher Satz für Hamilton'sche Systeme
(konstantes Phasenraumvol.)

Def.: Ein dynamisches System heißt dissipativ, wenn Phasenraumvolumina schrumpfen.

Kriterium für (Lyapunov-)Stabilität (lokal):

Wenn \underline{x}^* stabil ist, dann hat keines der Eigenwerte der Jacobi-Matrix $(DF)_{\underline{x}^*}$ einen pos. Realteil.

Beispiel: Fixpkt a) ($\varphi=0$) des Pendels mit / ohne Reibung

Hinreichende Bed. für asymptot. Stabilität:

Alle Eigenwerte haben negative Realteile

Beispiel: Fixpkt. a) des Pendels mit Reibung

Beispiel für Instab.: Fixpkt. b) ($\varphi=\pi$)

Allg. System mit $n=2$

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (A_{11} - \lambda)(A_{22} - \lambda) - A_{21}A_{12} \\ = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} - \lambda(A_{11} + A_{22}) + \lambda^2$$

$$\begin{aligned} \text{Eigenwerte: } \det(A - \lambda \mathbb{1}) &= \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A = 0 \\ &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \\ &= \lambda^2 - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (\operatorname{tr} A \pm \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A})$$

$$\operatorname{tr} A = \sum_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right)_* = \operatorname{div} \underline{F}$$

Fallunterscheidung

(a) Stabiler Fokus : $\det A > 0$ $\operatorname{tr} A < 0$
(Strudelpt.) $(\operatorname{tr} A)^2 < 4 \det A$

$$\lambda_{1,2} = -\lambda_0 \pm i\omega \quad (\lambda_0, \omega > 0) \quad \text{gedämpfte Osz. im Phasenraum}$$



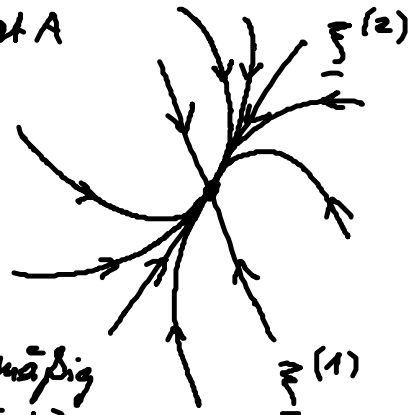
ellipt. Spirale

(b) Instabiler Fokus : $\det A > 0$ $\operatorname{tr} A > 0$
 $(\operatorname{tr} A)^2 < 4 \det A$

$$\lambda_{1,2} = +\lambda_0 \pm i\omega \quad (\lambda_0, \omega > 0) \quad \text{entdämpfte Osz.}$$

(c) Stabiler Knoten : $\det A > 0$ $\operatorname{tr} A < 0$
 $(\operatorname{tr} A)^2 > 4 \det A$

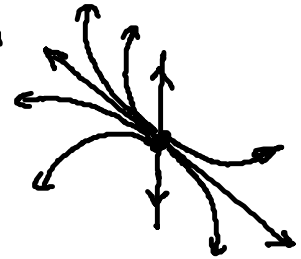
$\left. \begin{matrix} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{matrix} \right\} \in \mathbb{R}$ exp. Zerfall



(fast alle Trajektorien nähern sich längs dem Eigenvektor, der zum betragsmäßig kleineren Eigenwert gehört)

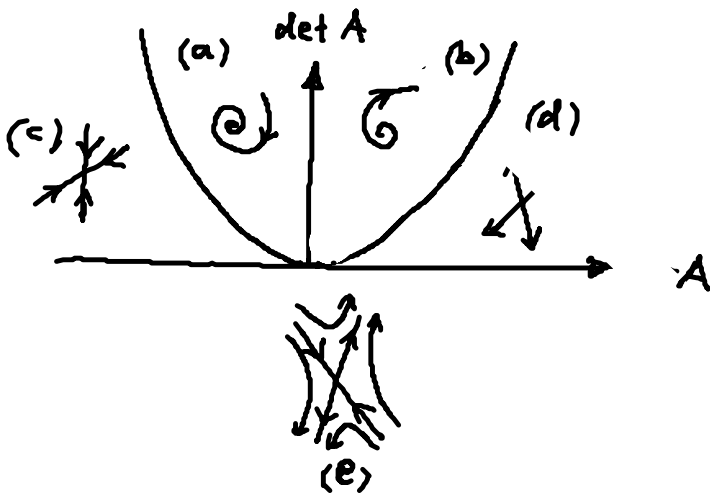
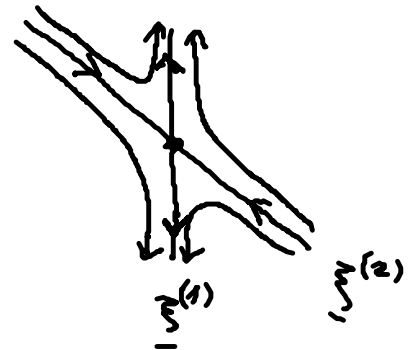
(d) Instabiler Knoten : $\det A > 0$, $\operatorname{tr} A > 0$
 $(\operatorname{tr} A)^2 > 4 \det A$

$\left. \begin{matrix} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{matrix} \right\} \in \mathbb{R}$ exp. Entdämpfung




(e) Sattelpunkt : $\det A < 0$

$\left. \begin{matrix} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{matrix} \right\} \in \mathbb{R}$



Grenze zwischen den 5 Bereichen: entartete Fälle

- lin. Stab. analyse versagt, höhere Terme der Taylorentwicklung um Fixpkt. nötig
 $\text{tr } A = 0, \det > 0$: entweder Zentrum  ungedämpfte Dsz.
 oder schwach stabiler / instab. Fokus
- qualitative Änderungen im Verhalten des Flusses möglich
 (Bifurkationen = Verzweigungen der Lösungsmannigfaltigkeit)