1.2.1. Langzeitverhalten von Hamilton'schen Vektorfeldern

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

Linearisierung um Fixpunkt $\underline{x}^*$,

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix}$$

$$\delta x(t) = \underline{x} - \underline{x}^*$$

$$\delta \dot{\underline{x}} = A \, \delta x$$

$$\delta \dot{x}_i = \sum_{k=1}^{2f} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right) \delta x_k$$

$$\mathrm{tr}\, A = \mathrm{div}\, \underline{F} = \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = 0$$

Aus $\boxed{0 = \mathrm{tr}\, A} = \sum_{i=1}^{2f} \lambda_i$ folgt, dass

keine asymptot. Stabilität möglich ist.
(sondern nur Lyapunov-Stabilität)

Beweis: sonst müssen alle $\mathrm{Re}\, \lambda_i < 0$ sein

$$\Rightarrow \mathrm{tr}\, A = \sum_i \mathrm{Re}\, \lambda_i + i \underbrace{\sum_i \mathrm{Im}\, \lambda_i}_{\substack{0 \\ \text{konj. kompl.}}} < 0 \qquad \lightning$$

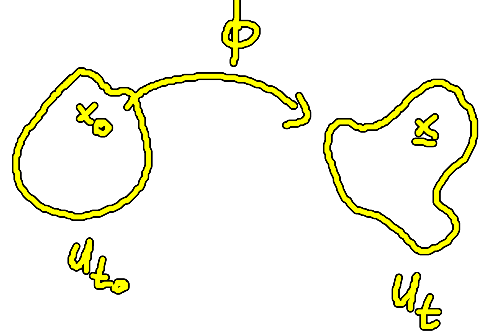
Bsp: nur $\mathrm{Re}\, \lambda_i = 0$, $\lambda_i = \pm i\omega$ (Zentrum)

Falls $f=1$ $(n=2)$: Fixpunkte können nur Zentrum (falls $\det > 0$) oder Sattelpunkt (falls $\det A < 0$) sein

Für Hamilton'sche Systeme folgt aus

$\operatorname{tr} \underline{A} = \operatorname{div} \underline{F} = 0$ der Liouville'sche Satz der klass. stat. Physik.

$\dot{\underline{x}} = F(\underline{x})$
$A := (DF)_*$



Phasenraumvolumen

$$V_t = \int_{U_t} d^{2f}x$$

$$= \int_{U_{t_0}} d^{2f}x_0 \det D\phi_t(x_0)$$

Bem.

$$\left(dx = \frac{\partial x}{\partial x_0} dx_0 \right)$$

$$\phi_t(x_0) = \underline{x}(t)$$

$$D\phi_t(x_0) = \left(\frac{\partial x^i(t)}{\partial x_0^k} \right)$$

$$= \int_{U_{t_0}} d^{2f}x_0 \left[1 + (t-t_0) \sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial F_i}{\partial x_0^i} + \dots \right]$$

Taylor

$$\approx \underbrace{\frac{\partial x_0^i}{\partial x_0^k}}_{\delta_{ik}} + (t-t_0) \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x^i}{\partial x_0^k}}_{\frac{\partial}{\partial x_0^k} F_i} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} 1+\dots & & \\ & 1+\dots & \\ & & 1+\dots \end{pmatrix}$$

$$= V_{t_0} + (t-t_0) \int d^{2f}x_0 (\operatorname{div} F) + O(t-t_0)^2$$

$$\frac{d}{dt} V_t = \lim_{t \to t_0} \frac{V_t - V_{t_0}}{t - t_0}$$

$$= \int d^{2f}x_0 \, \underbrace{(\mathrm{div}\, \underline{F})_{x_0}}_{0 \,\leftarrow\, \text{für Hamilton'sche Systeme}} = 0$$

Phasenraumvolumina erhalten
d.h. Fluss inkompressibel !

1.2.2. Dissipative Systeme

Für dissipative Systeme gilt für kleine Volumina, die einen asymptotisch stabilen Fixpunkt $\underline{x}^*$ umschließen

$$\frac{dV_t}{dt} \approx \int_{U_t} d^{2f}x \, (\mathrm{div}\, \underline{F})_{\underline{x}^*} = \Lambda \cdot V_t \quad \Rightarrow \quad \boxed{V(t) = e^{\Lambda t} V_0}$$

mit Phasenraumkontraktionsrate
$$\Lambda := \mathrm{div}\, \underline{F} = \mathrm{tr}\, A = \sum_i \mathrm{Re}\, \lambda_i$$

Allg. gilt:

Def: Dissipative Systeme sind solche, die Phasenvolumina kontrahieren.

Asymptotisch stabile Fixpunkte (Knoten, Fokus) heißen Senken oder Attraktoren.

Beispiel für dissipatives System: Lorenzmodell

(abgeleitet aus der Temperatur und Strömungsverteilung einer inkompressiblen Flüssigkeit Rayleigh-Bénard-System)

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y$$
$$\dot{y} = -xz + rz - y$$
$$\dot{z} = xy - bz$$

Linearisierung:

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z & -1 & r-x \\ y & x & -b \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda = \mathrm{tr}\, A = -(\sigma+1+b)$$

$$\Rightarrow V(t) = e^{-(\sigma+1+b)t} V_0 \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

Phasenraumvolumina schrumpfen monoton!

· Hermann Haken: semiklass. Lasergleichungen (Maxwell-Bloch-Gln.) sind äquivalent zu den Lorenzgleichungen.

Das Langzeitverhalten dissipativer Systeme wird durch Attraktoren bestimmt:

Def.: Sei $\underline{F}$ ein Vektorfeld auf $M = \mathbb{R}^n$

Eine abgeschlossene, unter dem Fluss ϕ_t invariante $(\phi_t(A) \subseteq A)$, unzerlegbare Teilmenge $A \subset M$ heißt Attraktor, falls

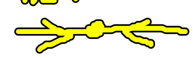
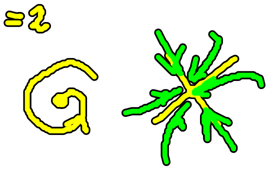
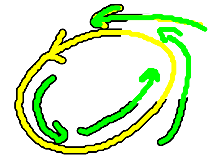
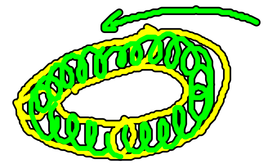
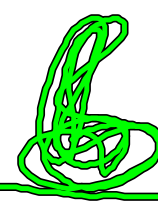
(i) $A \subset U_0$ (offene Umgebung von A) mit $\phi_t(U_0) \subseteq U_0 \quad (t>0)$

(ii) $\forall\, V$ mit $A \subset V \subset U_0 \quad \exists\, T>0$, so dass:

$$\phi_t(U_0) \subset V \quad (t>T)$$

d.h. es gibt ein Attraktorbecken U_0, aus dem der Fluss asymptotisch in den Attraktor A läuft.

NB: Es kann mehrere koexistierende Attraktoren auf M geben

Mindestdim n des Phasenraumes	Attraktor	Attraktor-dim	
1	stabiler Fixpunkt	0	$n=1$  $n=2$ 
2	stabiler Grenzzyklus (limit cycle)	1	 periodischer Orbit
3	stabiler Torus T^2	2	 quasiperiodisch 2 Frequenzen $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$
3	seltsamer Attr. (strange)	$2 < d < 3$ fraktal	chaotisch 

1.3 Bifurkationen

- Abhängigkeit des Flusses von einem Kontrollpar. μ ?
- Zahl und Art der Attraktoren kann sich schlagartig bei einem

krit. Wert μ_c ändern.

→ Bifurkation („Verzweigung der Lösungsmannigfaltigkeit")

Notwendige Voraussetzung: Nichtlinearität

verknüpft mit Stabilitätswechsel → untersuche lineare Stabilität der Fixpunkte (im Fall von lokalen Bif.)