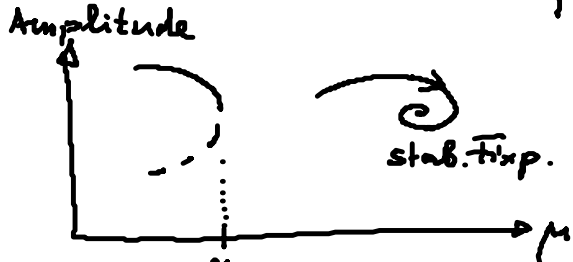


(C) Lokale Bifurkation von Grenzzyklen

Startpunkt jetzt: Grenzzyklus, nicht Fixpt.
keine einfache lin. Stabilitätsanalyse

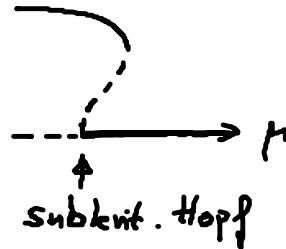
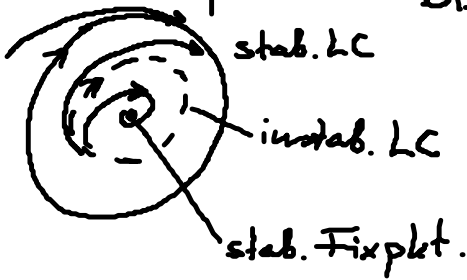
(C1) Sattel-Knoten-Bifurkation eines Grenzzyklus

(Kondensation von Pfaden, fold bifurcation of limit cycle LC)



Amplitude $\neq 0$
Frequenz $\neq 0$

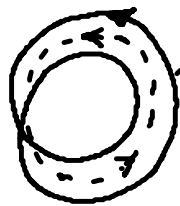
Bistabilität zwischen Fixpt. und LC, häufig:



(C2) Perioden-Verdopplung (flip-Bifurkation, Subharm. Bif.)



Periode-1 Grenzzykl.



Periode-2 Grenzzyklus

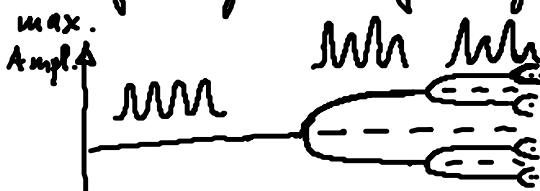
Möbiusband

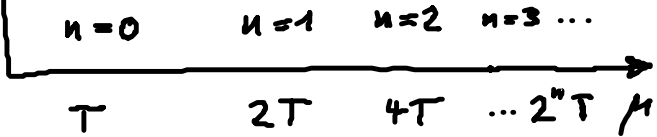
mind. 3D Phasenraum



phase flip π
nach 1 Umlauf

Torsion benachbarter Traj.!





Floquet-Exp. $\Lambda = \lambda + i\omega$

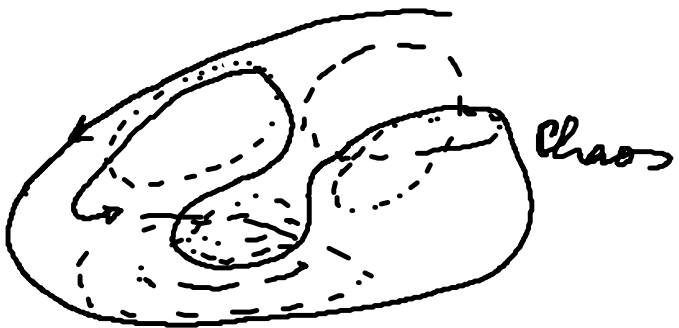
Bif. : $\lambda = 0$, $\omega T = \pi$

\Rightarrow Floquet-Mult. $\mu = e^{\Lambda T} = e^{i\pi} = -1$

häufig Periodenverdopplungskaskade

\rightarrow Chaos (Feigenbaum-Szenario)

\rightarrow unendlich viele instabile periodische Orbits der Perioden $2^n T$ ($n=0, 1, 2, \dots$)



(C3) Sacker-Neimark-Bifurkation

(Sekundäre Hopf-Bif. eines LC)

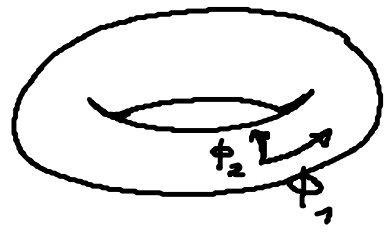


1. Hopf-Bif. des Fixpkt. : $\phi_1 = \omega_1 t$

2. Hopf-Bif. des LC : $\phi_2 = \omega_2 t$

LC \longrightarrow 2-Torus

mind. 3D Phasenraum



inkommensurable Frequenzen
(quasiperiodisch)

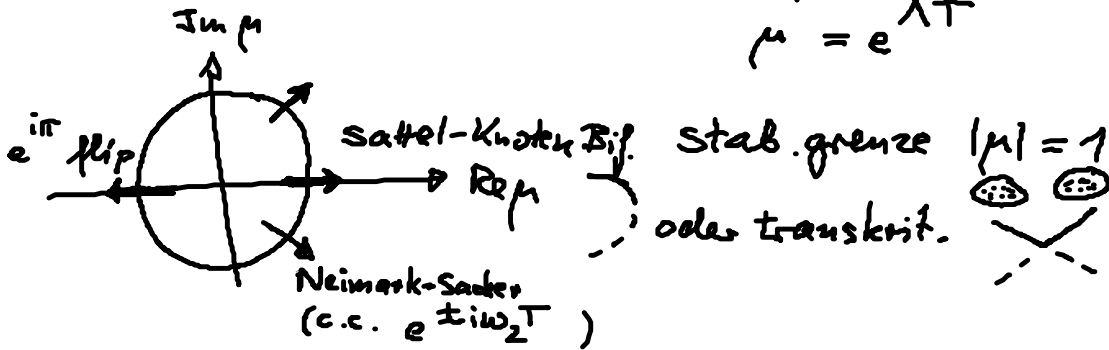
$\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$
irrational

\Rightarrow Trajektorie schließt sich nicht, liegt dicht auf dem Torus

falls $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ geschlossener Orbit = LC
 (frequency locking)
 Modenkopplung

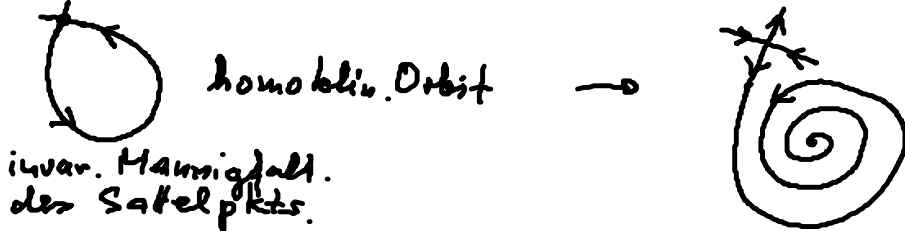
Instabilität von Grenzzyklen: Floquet-Multiplikator

$$\mu = e^{\Lambda T}$$



(D) globale Bifurkation von Grenzzyklen

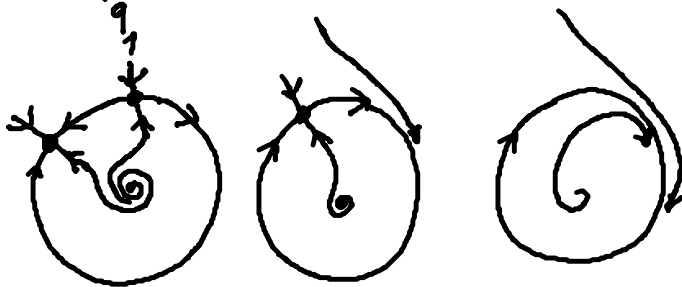
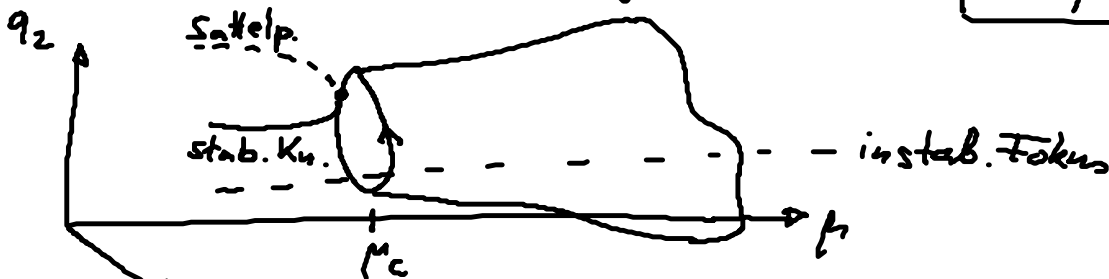
globale qualitative Änderung des Phasengabhalts,
 z.B.



(D1) Sattel-Knoten-Bif. auf einem Grenzzyklus (Omega explosion)

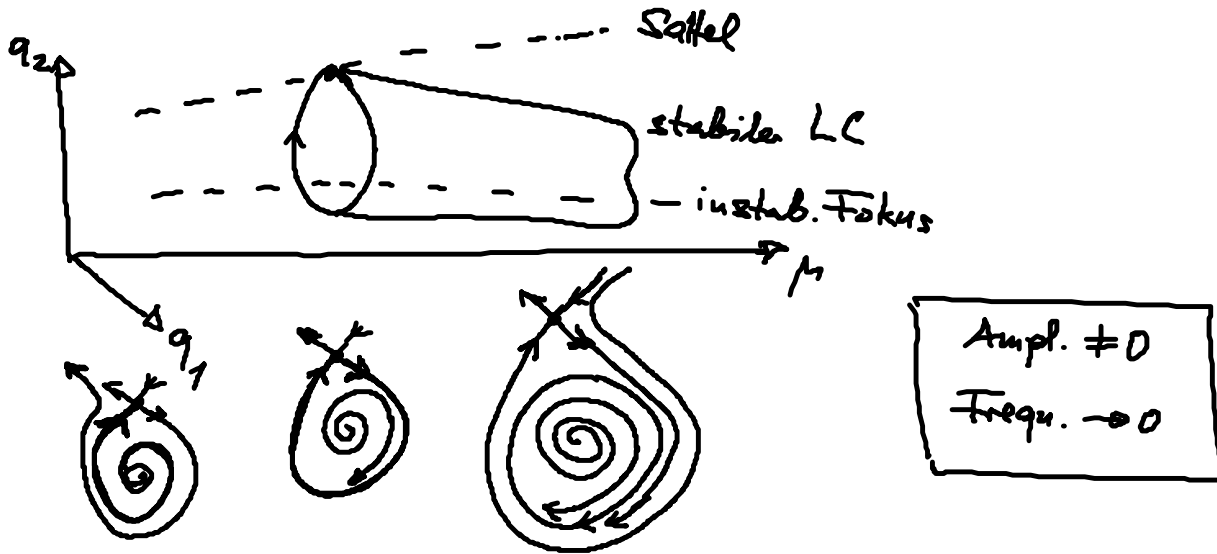
saddle-node infinite period (SNIPER)
 saddle-node on invariant cycle (SNIC)

Amplitude $\neq 0$
Frequ. $\rightarrow 0$

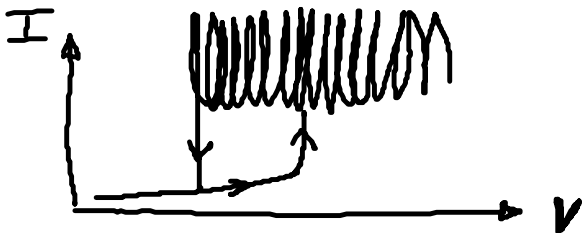
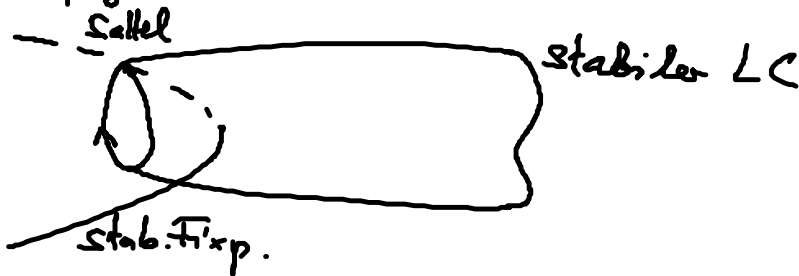


(D2) Homokline Bif (blue-sky catastrophe)

Sattelpunkt kollidiert mit LC: homokline Orbit (saddle-to-saddle loop)



häufig Bistab. zwischen Osz. u. Fixpt., z.B.



Einfaches generisches Modell für SNIPER

- (Ditzinger, Ning, Hu: PRE 50, 3508 (94)
 Hu, Ditzinger, Ning, Haken: PRL 71, 87 (93)
 Hatzianthi, Anst, Schöll: Int. J. Bif. Chaos 18, 1759 (08)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1-x^2-y^2) + y(x-b) \\ \dot{y} &= y(1-x^2-y^2) - x(x-b) \end{aligned}$$

in Polarkoord. $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r^2) \\ \dot{\varphi} = b - r \cos \varphi \end{cases} \quad b > 0 \quad \begin{pmatrix} \delta \dot{r} \\ \delta \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3r^2 & 0 \\ -\cos \varphi & r \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \varphi \end{pmatrix}$$

Fixpunkte: $r=0$ (immer instab. Fokus, "U")
 $r=1, b = \cos \varphi \Rightarrow \varphi = \arccos b$ ($b < 1$)

für $b > 1$: LC mit $r=1, \dot{\varphi} = b - \cos \varphi > 0 \quad \forall \varphi$

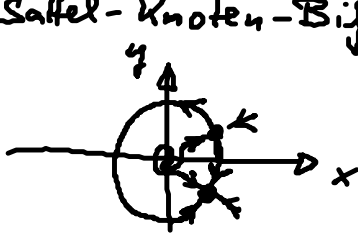
$$\frac{2\pi}{\sqrt{b^2-1}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{b - \cos \varphi} = \int_0^T dt = T$$

Bif. pkt. : $b=1 \Rightarrow T \rightarrow \infty$ (Frequ. $\rightarrow 0$)

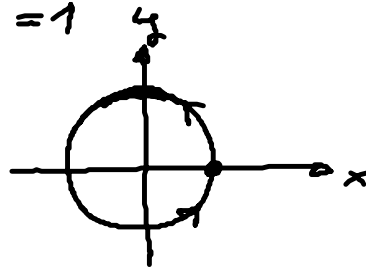
Fixpkt. auf dem Kreis $r=1$:

$$\begin{aligned} (x^*, y^*) &= (b, +\sqrt{1-b^2}) \quad \text{Sattelpkt.} \quad (\lambda = \begin{cases} -2 \\ \sqrt{1-b^2} \end{cases}) \\ &= (b, -\sqrt{1-b^2}) \quad \text{stab. Kw.} \quad (\lambda = \begin{cases} -2 \\ -\sqrt{1-b^2} \end{cases}) \end{aligned}$$

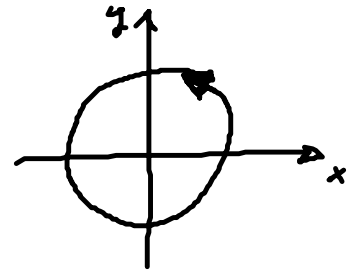
Sattel-Knoten-Bif. : $b=1$



$b < 1$



$b = 1$



$b > 1$

(Anregbarkeit Typ I)