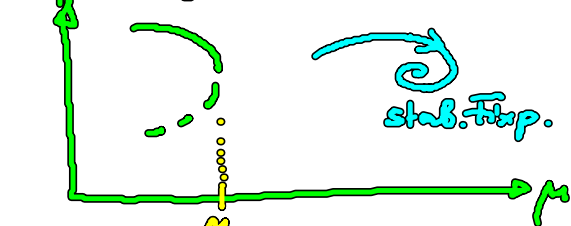


# (C) Lokale Bifurkation von Grenzzyklen

Startpunkt jetzt: Grenzzyklus, nicht Fixpt.  
keine einfache lin. Stabilitätsanalyse

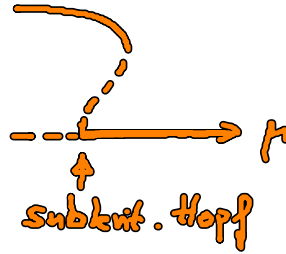
## (C1) Sattel-Knoten-Bifurkation eines Grenzzyklus

(Kondensation von Pfaden, fold bifurcation of limit cycle LC)

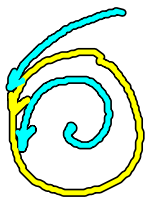


Amplitude  $\neq 0$   
Frequenz  $\neq 0$

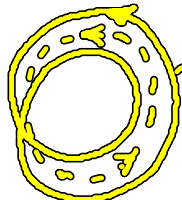
Bistabilität zwischen Fixpt. und LC, häufig:



## (C2) Perioden-Verdopplung (Flip-Bifurkation, Subhar. Bif.)



Periode-1  
Grenzzykl.



Periode-2  
Grenzzyklen

Möbiusband

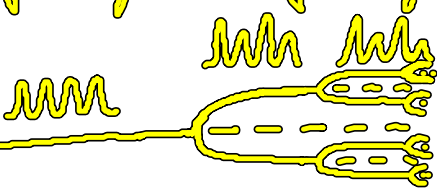
mind. 3D Phaserraum

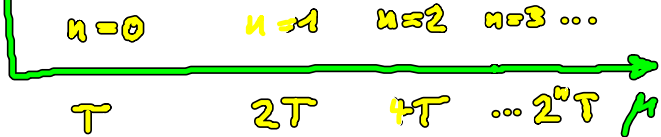


phase flip  $\pi$   
nach 1 Umlauf

Torsion benachbarter Traj.!

max. Amplit.





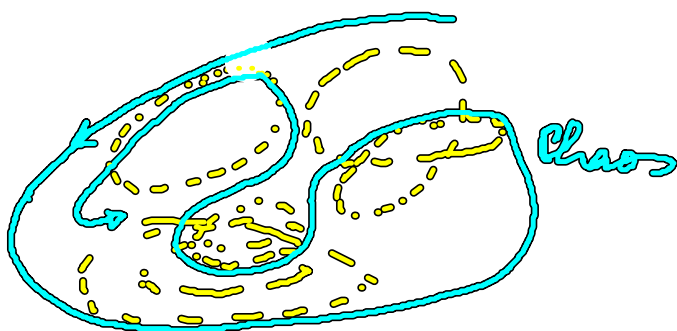
Floquet-Exp.  $\lambda = \lambda + i\omega$

Bif. :  $\lambda = 0$ ,  $\omega T = \pi$

$\Rightarrow$  Floquet-Mult.  $\mu = e^{\lambda T} = e^{i\pi} = -1$

häufig Periodenverdoppl.kaskade  
 $\rightarrow$  Chaos (Feigenbaum-Szenario)

$\rightarrow$  unendlich viele instabile periodische Orbits der Perioden  $2^n T$   
 ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )



### (C3) Sacker - Neimark - Bifurkation

(Sekundäre Hopf-Bif. eines LC)



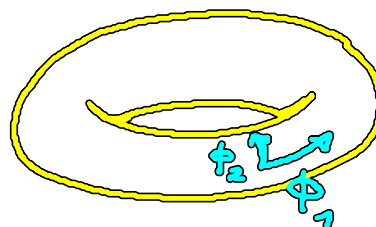
1. Hopf-Bif. des Fixpt. :  $\phi_1 = \omega_1 t$
2. Hopf-Bif. des LC :  $\phi_2 = \omega_2 t$

LC  $\longrightarrow$  2-Torus

mind. 3D Phasenraum

inkommensurable Frequenzen  $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$   
 (quasiperiodisch) irrational

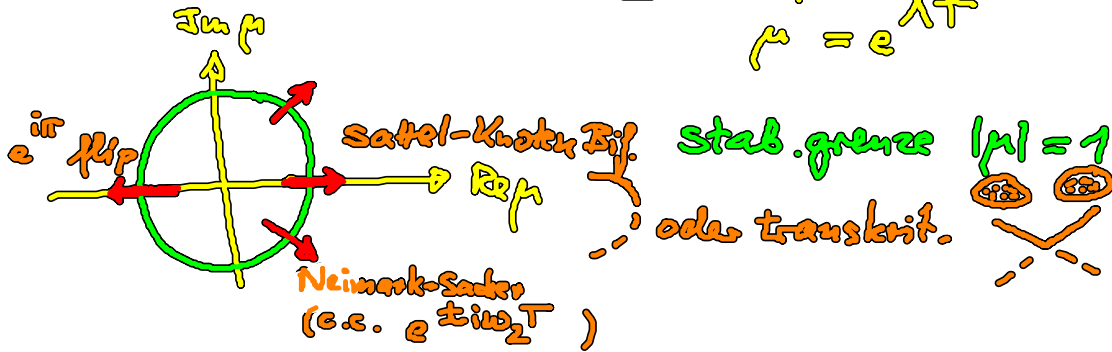
$\rightarrow$  Trajektorie schließt sich nicht, liegt dicht auf dem Torus



falls  $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$  geschlossener Orbit = LC  
 (frequency locking)  
 Modenkopplung

Instabilität von Grenzzyklen: Floquet-Multiplikatoren

$$\mu = e^{\Lambda T}$$



(D) Globale Bifurkationen von Grenzzyklen

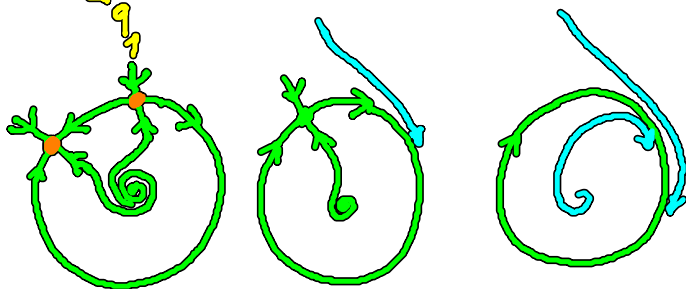
globale qualitative Änderung des Phasenportraits,  
 z.B.



(D1) Sattel-Knoten-Bif. auf einem Grenzzyklus (Omega explosion)

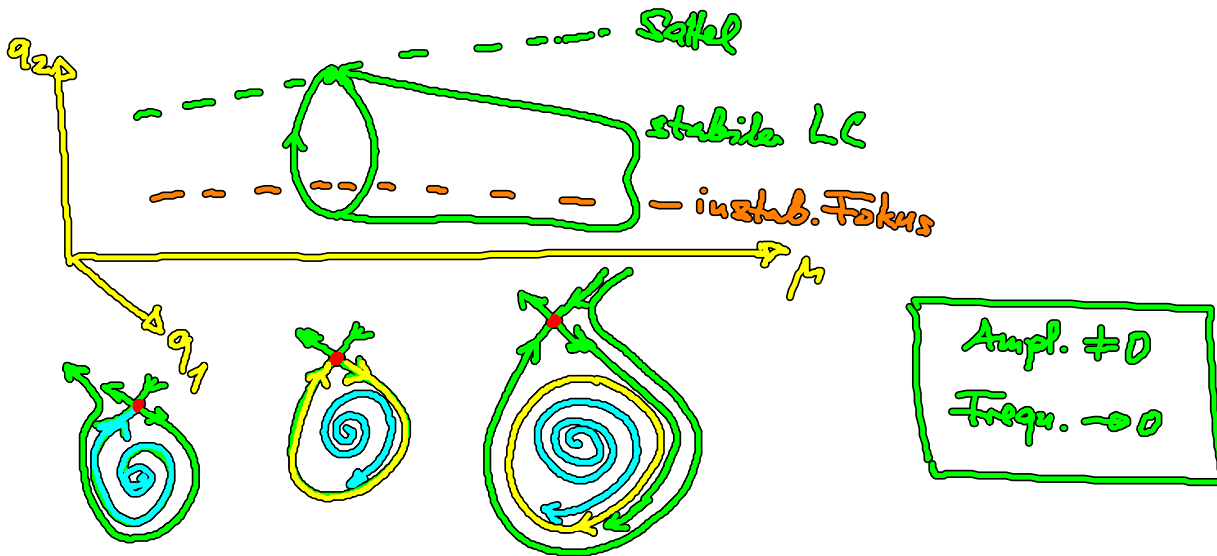
saddle-node infinite period (SNIPER)  
 saddle-node on invariant cycle (SNIC)

Amplitude  $\neq 0$   
 Frequ.  $\rightarrow 0$

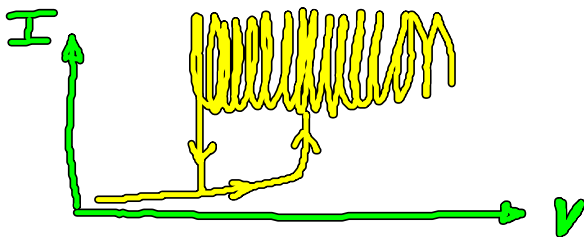
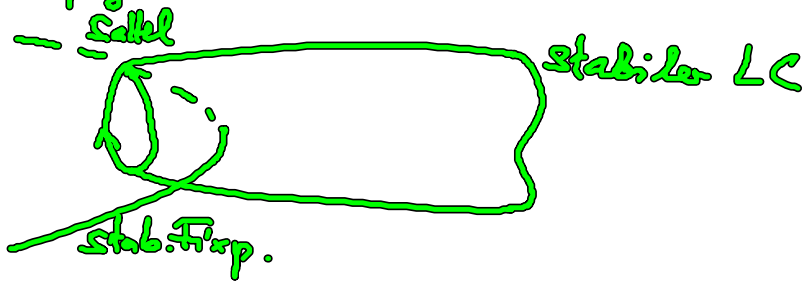


## (D2) Homokline Bif (blue-sky catastrophe)

Sattelpunkt kollidiert mit LC : homokliner Orbit (saddle-to-saddle loop)



häufig Bistab. zwischen Ose. u. Fixpt., z.B.



## Einfaches generisches Modell für SNIPER

( Ditzinger, Ning, Hu : PRE 50, 3508 (94)

Hu, Ditzinger, Ning, Haken : PRL 71, 87 (93)

Hatzianthi, Anst, Schöll : Int. J. Bif. Chaos 18, 1759 (08)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1-x^2-y^2) + y(x-b) \\ \dot{y} &= y(1-x^2-y^2) - x(x-b) \end{aligned}$$

in Polarkoord.  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r^2) \\ \dot{\varphi} = b - r \cos \varphi \end{cases} \quad b > 0 \quad \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3r^2 & 0 \\ -\cos \varphi & r \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \varphi \end{pmatrix}$$

Fixpunkte:  $r=0$  (immer instab. Fokus,  $\ddot{U}$ )  
 $r=1, b = \cos \varphi \Rightarrow \varphi = \arccos b$  ( $b < 1$ )

für  $b > 1$ : LC mit  $r=1, \dot{\varphi} = b - \cos \varphi > 0 \quad \forall \varphi$   

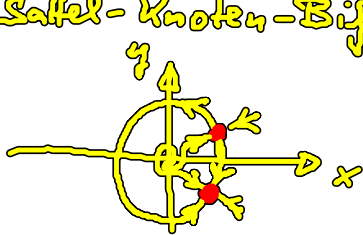
$$\frac{2\pi}{\sqrt{b^2-1}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{b - \cos \varphi} = \int_0^T dt = T$$

Bif.pkt.:  $b=1 \Rightarrow T \rightarrow \infty$  (Frequ.  $\rightarrow 0$ )

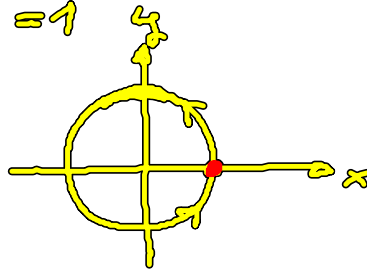
Fixpkt. auf dem Kreis  $r=1$ :

$(x^*, y^*) = (b, +\sqrt{1-b^2})$  Sattelpkt. ( $\lambda = \begin{cases} -2 \\ \sqrt{1-b^2} \end{cases}$ )  
 $= (b, -\sqrt{1-b^2})$  stab. Kv. ( $\lambda = \begin{cases} -2 \\ -\sqrt{1-b^2} \end{cases}$ )

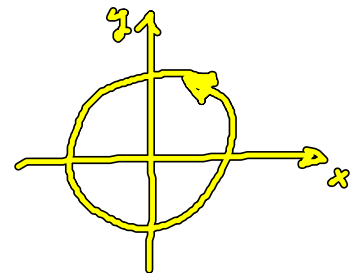
Sattel-Knoten-Bif.:  $b=1$



$b < 1$



$b = 1$



$b > 1$

(Anregbarkeit Typ I)