

## (E) Bifurkation von räumlichen Mustern

$$\dot{\underline{q}}(\underline{x}, t) = F(\underline{q}, \mu) + D \Delta \underline{q} \quad \text{Diff. konst. } D$$

Lineare Stab. der Fixpunkte (räuml. homogen) :

$$\delta \underline{q} \sim e^{\lambda t} e^{i \underline{k} \cdot \underline{x}}$$

⇒ Dispersionsrel.  $\lambda(\underline{k})$

→  $\text{Re } \lambda(\underline{k}) < 0$  stabil

$> 0$  instabil

$= 0$  Bif. von räuml.-period. Lösungen  
mit Wellenvektor  $\underline{k}$

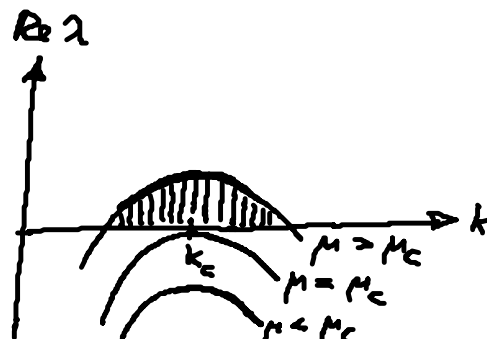
$$A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial q_j}(\underline{q}^*) - D_{ij} k^2$$

### (E1) Turing-Instabilität

$$\lambda(\underline{k}) = 0 \quad |\underline{k}| = k_c \neq 0$$

stat., räumlich period. Struktur  
mit  $k_c$  bifurkiert

(z.B. langsam diffundierendes Aktivator + schneller Inhibitor)



$$\lambda(k) = \epsilon - b(k^2 - k_c^2)^2$$

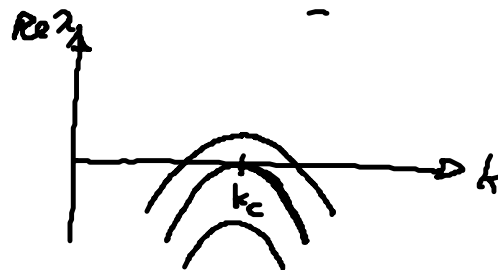
$$\epsilon = \frac{\mu - \mu_c}{\mu_c}$$

### (E2) Stehende / laufende Wellen

$$\lambda(k) = \pm i\omega \quad \text{bei } |\underline{k}| = k_c \neq 0$$

Oszill., räumlich period. Struktur → Wellen  $\delta \underline{q} \sim e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} \pm \omega t)}$

$$\lambda(k) = \epsilon - b(k^2 - k_c^2)^2 \pm i\omega$$

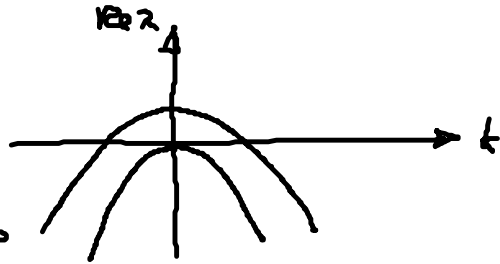


### (E3) Hopf-Bifurkation

$$\lambda = \pm i\omega \quad \text{bei } k = k_c = 0$$

$$\lambda(k) = \epsilon - b(k^2)^2 \pm i\omega$$

räuml.-homogener Grenzzyklus



## 1.4 Deterministisches Chaos

Deterministische, aber ungeordnete Bewegung im Langzeitverhalten von Systemen mit  $n \geq 3$  (autonom): seltsamer (chaotischer) Attraktor

Kriterien zur Klassifikation:

quasiperiod.	determinist. Chaos	stochastisch (Rauschen)
wenige dyn. Freiheitsgrade: niedrig-dim. Phasenraum		viele mikroskop. Freiheitsgrade (statist. Ensemble) $f \sim 10^{24}$
Attraktor: Tonus $T^d$ mit $d=2,3,4$	seltsamer Attraktor mit fraktaler Dim.	

Autokorr. fkt.  $\langle x(t)x(t+\tau) \rangle := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt$

period. in  $\tau$  |  $\rightarrow 0$  für  $\tau \rightarrow \infty$  |  $= 0$  für  $\tau \geq \tau_c$

Fourierspektrum (bzw. spektrale Leistungsdichte  $S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t)x(t+\tau) \rangle e^{i\omega\tau} dt$ )  
power spectrum

diskrete Frequ.  $\omega_1, \omega_2, \dots$  | breiter Frequenzband

Instab. der Bewegung bei kleinen Störungen der Anfangsbed.

typ. universelle Bifurk.szenarien

Def.: Eine Bewegung heißt chaotisch, wenn sie empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängt

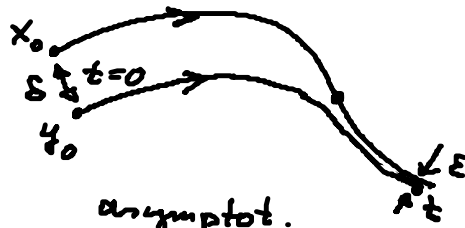
Quantitative Formulierung der Stab. gegenüber kleinen Variationen

der Anfangsbed.:

Bahnstabilität (orbitale Stabilität):

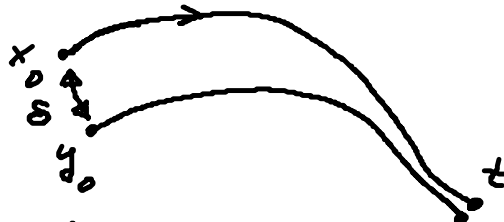


bahnstabil  
 (alle benachbarten  
 Bahnen bleiben  
 in einer Röhre um  
 $\phi(t, x_0)$ )



asymptot.  
 bahnstabil  
 (Abstand der benachbarten Bahnen  $\rightarrow 0$   
 für  $t \rightarrow \infty$ )

Ljapunov / asymptot. stabil:



für dasselbe  $t$  gilt  $t$   
 $|\phi(t, x_0) - \phi(t, y_0)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

Linearisierung in der Nähe der Lösungskurve  $\phi(t, x_0)$ :

$$\delta \dot{x}_i = \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{\partial F_i}{\partial x_k}}_{A_{ik}(t)}(x(t), t) \delta x_k$$

$A_{ik}(t)$  : Eigenwerte  $\lambda_k(t)$ , Eigenvektor  $\underline{\xi}^{(k)}(t)$

formale Lösung:  $\underline{\delta x}(t) = e^{\int_0^t A(t') dt'} \underline{\delta x}(0)$

Zeitentr. einer infinites. Kugel um  $x_0$

$\rightarrow$  n-dim. Ellipsoid mit Hauptachsen  $p_k(t) \sim p_k(0) e^{\lambda_k t}$

Def.: Stab. ist bestimmt durch die Ljapunov-Exponenten

$$\bar{\lambda}_k := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{p_k(t)}{p_k(0)}$$

NB: Führender (größter) Ljapunov-Exp.

$$\lambda := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |x(t) - y(t)|$$

$$\Rightarrow |\phi(t, x_0) - \phi(t, y_0)| \sim e^{\lambda t}$$

$\lambda < 0$  : kleine Abweichungen der Anf. bed. expon. gedämpft

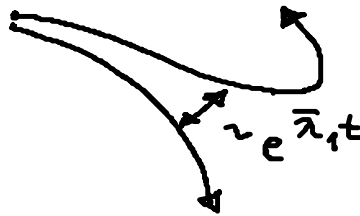
$\lambda > 0$  : expon. Auseinanderlaufen benachbarter Bahnen

$\hat{=}$  Kriterium für Chaos

Chaotischer Attraktor im  $\mathbb{R}^3$  :  $\bar{\lambda}_1 > 0$ ,  $\bar{\lambda}_2 = 0$ ,  $\bar{\lambda}_3 < 0$

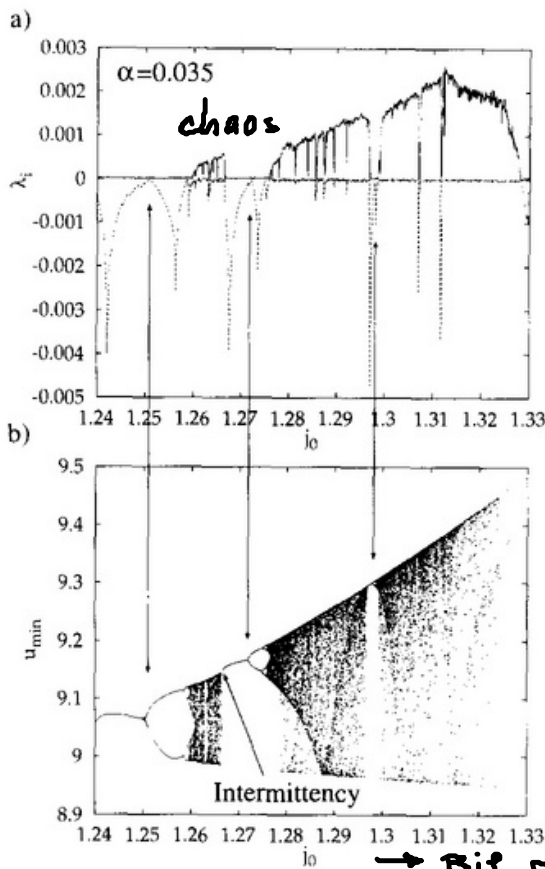
instab. Bewegung auf dem Attraktor

Annäherung an den Attraktor



S. Bose et al. / Physics Letters A 195 (1994) 144-150

Modell einer Halbleiterstruktur  
(heterostructure Hot Electron Diode)



$\rightarrow$  Bif. parameter

Fig. 8. (a) Lyapunov spectrum, (b) bifurcation diagram for  $\alpha = 0.035$

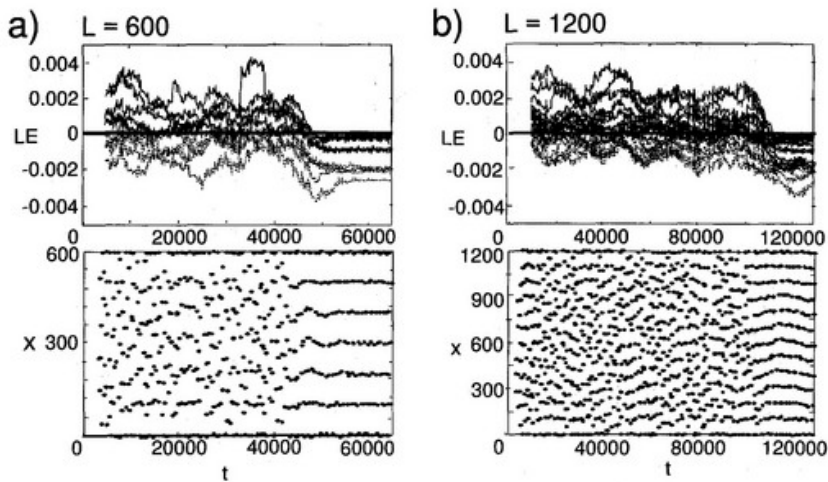


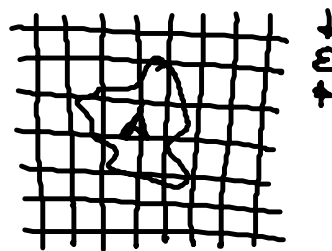
Fig. 2. Transient spatio-temporal chaos for different system sizes (a)  $L = 600$  and (b)  $L = 1200$ . The upper row shows the evolution of the local Lyapunov exponents (LE), and the lower row shows the space-time plot of the maxima of the current density  $j = u - a$  ( $\alpha = 0.02$ ,  $D = 8.0$ ,  $j_0 = 1.21$ ,  $T = 0.05$ ).

## Quantitative Formulierung der fraktalen Dimension des seltsamen Attraktors

Verallg. Dimensionsbegriff:

Hausdorff-Dimension einer Punktmenge  $A$  im  $\mathbb{R}^n$





Sei  $N(\varepsilon)$  die Mindestzahl von  $n$ -dim. Würfeln mit Seitenlänge  $\varepsilon$ , um  $A$  zu überdecken. Dann ist



$$d := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}$$

die fraktale (Hausdorff-)Dimension

$$\left( \text{d. h. } N(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon^d} \right)$$

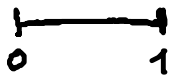
Beispiel: Punkt  $N(\varepsilon) = \text{const}$    $d = 0$   
 Linie  $N(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon}$    $d = 1$   
 Fläche  $N(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon^2}$    $d = 2$   
 Vol.  $N(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon^3}$    $d = 3$

Chaotischer Attraktor im  $\mathbb{R}^3$ : Volumen  $\rightarrow 0$

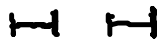
(vgl. Lasenz-Modell)

$\Rightarrow d < 3$ ; aber  $d > 2$ : z.B.  $d \approx 2.05$

Beispiel: Cantormenge (selbstähnliche Struktur)



$$\epsilon = 1 : N = 1$$



$$\epsilon = \frac{1}{3} : N = 2$$



$$\epsilon = \frac{1}{9} : N = 4$$

...

$$\epsilon = \frac{1}{3^n} : N = 2^n$$

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309\dots$$

Beispiel: Koch's Kurve (Schneeflocke)

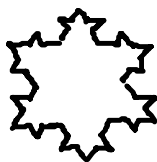


$$\epsilon = 1$$



$$\epsilon = \frac{1}{3}$$

$$N = 4$$



$$\epsilon = \frac{1}{9}$$

$$N = 16$$

$$\epsilon = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$N = 4^n$$

$$\text{Umfang} = 3 \cdot 4^n \left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow d > 1$$

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3}$$

$$1 < d = 1.2618\dots < 2$$

(zwischen Kurve und Fläche)

analog: Messerküste