

(E) Bifurkation von räumlichen Mustern

$$\dot{\underline{q}}(\underline{x}, t) = F(\underline{q}, \mu) + D \Delta \underline{q}$$

Diff. konst. D

Lineare Stab. der Fixpunkte (räuml. homogen) :

$$\delta \underline{q} \sim e^{\lambda t} e^{i \underline{k} \cdot \underline{x}}$$

→ Dispersionsrel. $\lambda(\underline{k})$

→ $\text{Re } \lambda(\underline{k}) < 0$ stabil
 > 0 instabil

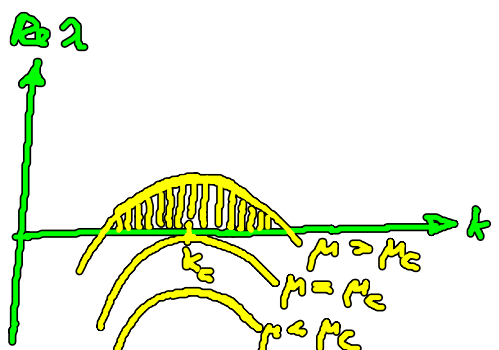
= 0 Bif. von räuml.-period. Lösungen mit Wellenvektor \underline{k}

$$A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial q_j}(\underline{q}^*) - D_{ij} k^2$$

(E1) Turing-Instabilität

$$\lambda(\underline{k}) = 0 \quad |\underline{k}| = k_c \neq 0$$

stat., räumlich period. Struktur
 mit k_c bifurkiert
 (z.B. langsam diffundierendes Aktivator + schneller Inhibitor)



$$\lambda(k) = \epsilon - b(k^2 - k_c^2)^2$$

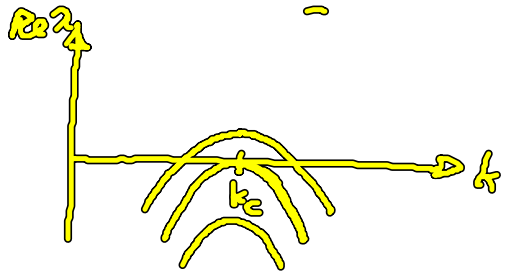
$$\epsilon = \frac{\mu - \mu_c}{\mu_c}$$

(E2) Stehende / laufende Wellen

$$\lambda(k) = \pm i\omega \quad \text{bei } |\underline{k}| = k_c \neq 0$$

Oszill., räumlich period. Struktur → Wellen $\delta \underline{q} \sim e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} \pm \omega t)}$

$$\lambda(k) = \epsilon - b(k^2 - k_c^2)^2 \pm i\omega$$

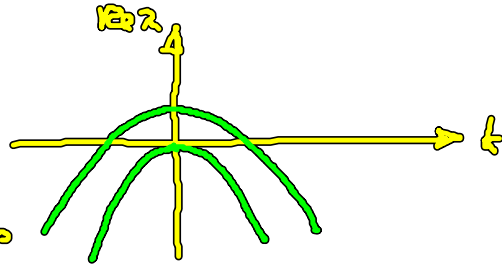


(E3) Hopf-Bifurkation

$$\lambda = \pm i\omega \quad \text{bei } k = k_z = 0$$

$$\alpha(k) = \epsilon - b(k^2)^2 \pm i\omega$$

räuml.-homogener Grenzzyklus



1.4 Deterministisches Chaos

Deterministische, aber ungeordnete Bewegung im Langzeitverhalten von Systemen mit $n \geq 3$ (autonom): seltsamer (chaotischer) Attraktor

Kriterien zur Klassifikation:

quasiperiod.	determinist. Chaos	stochastisch (Rauschen)
wenige dyn. Freiheitsgrade: niedrig-dim. Phasenraum		viele mikroskop. Freiheitsgrade (statist. Ensemble) $f \sim 10^{24}$
Attraktor: Tors T^d mit $d=2,3,4$	seltsamer Attraktor mit fraktaler Dim.	

Autokorr.fkt. $\langle x(t)x(t+\tau) \rangle := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt$

period. in τ | $\rightarrow 0$ für $\tau \rightarrow \infty$ | $= 0$ für $\tau \geq \tau_c$

Fourierspektrum (bzw. spektrale Leistungsdichte $S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t)x(t+\tau) \rangle e^{i\omega\tau} d\tau$)
power spectrum

diskrete Freq. $\omega_1, \omega_2, \dots$ | breiter Frequenzband

Instab. der Bewegung
bei kleinen Störungen
der Anfangsbed.

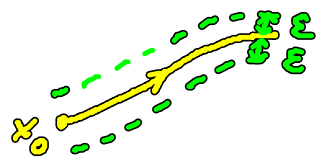
typ. universelle
Bifurk.szenarien

Def.: Eine Bewegung heißt chaotisch, wenn sie empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängt

Quantitative Formulierung der Stab. gegenüber kleinen Variationen

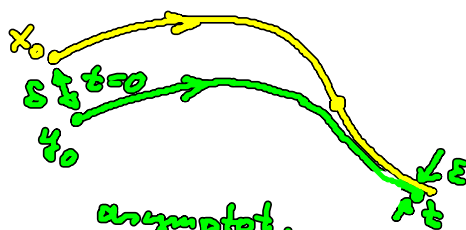
der Anfangsbed.:

Bahnstabilität (orbitale Stabilität):



bahnstabil

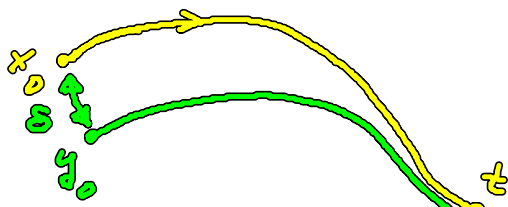
(alle benachbarten Bahnen bleiben in einer Röhre um $\phi(t, x_0)$)



asymptot. bahnstabil

(Abstand der benachbarten Bahnen $\rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$)

Lyapunov / asymptot. stabil:



für dasselbe t gilt $|\phi(t, x_0) - \phi(t, y_0)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

Linearisierung in der Nähe der Lösungskurve $\phi(t, x_0)$:

$$\delta \dot{x}_i = \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{\partial F_i}{\partial x_k}}_{A_{ik}(t)}(x(t), t) \delta x_k$$

$A_{ik}(t)$: Eigenwerte $\lambda_k(t)$, Eigenvektor $\underline{\xi}^{(k)}(t)$

formale Lösung: $\underline{\delta x}(t) = e^{\int_0^t A(t') dt'} \underline{\delta x}(0)$

Erstentw. einer infinites. Kugel um x_0

\rightarrow n -dim. Ellipsoid mit Hauptachsen $p_k(t) \sim p_k(0) e^{\lambda_k t}$

Def.: Stab. ist bestimmt durch die Lyapunov-Exponenten

$$\bar{\lambda}_k := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{p_k(t)}{p_k(0)}$$

NB: Führender (größter) Lyapunov-Exp.

$$\lambda := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\underline{x}(t) - \underline{y}(t)|$$

$$\Rightarrow |\phi(t, z_0) - \phi(t, y_0)| \sim e^{\lambda t}$$

$\lambda < 0$: kleine Abweichungen der Anf. bed. expon. gedämpft

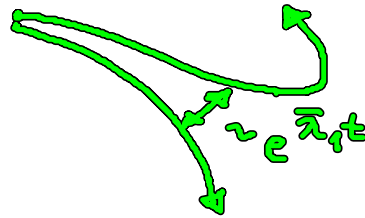
$\lambda > 0$: expon. Auseinanderlaufen benachbarter Bahnen

\cong Kriterium für Chaos

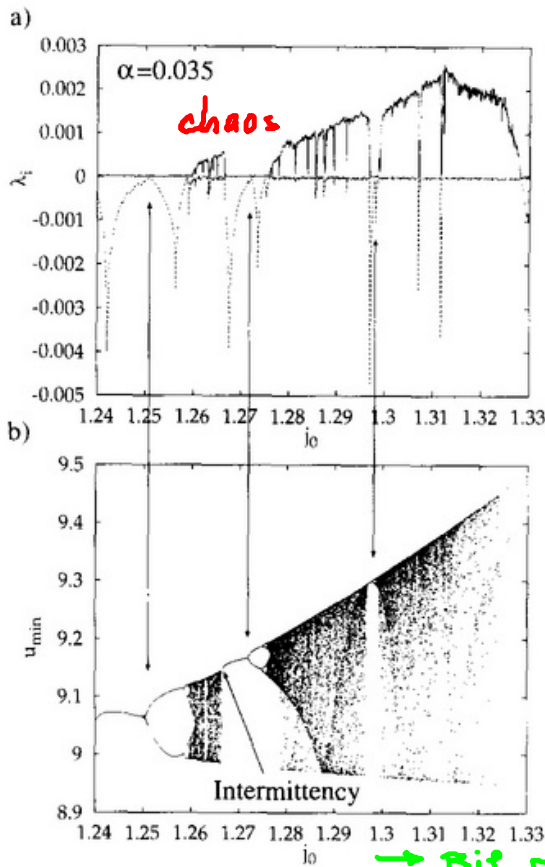
Chaotischer Attraktor im \mathbb{R}^3 : $\bar{\lambda}_1 > 0$, $\bar{\lambda}_2 = 0$, $\bar{\lambda}_3 < 0$

instab. Beweg. auf dem Attraktor

Annäherung an den Attraktor



S. Bose et al. / Physics Letters A 195 (1994) 144-150



Modell einer Halbleiter-Struktur (heterostructure Hot Electron Diode)

Fig. 8. (a) Lyapunov spectrum, (b) bifurcation diagram for $\alpha = 0.035$

\rightarrow Bif. parameter

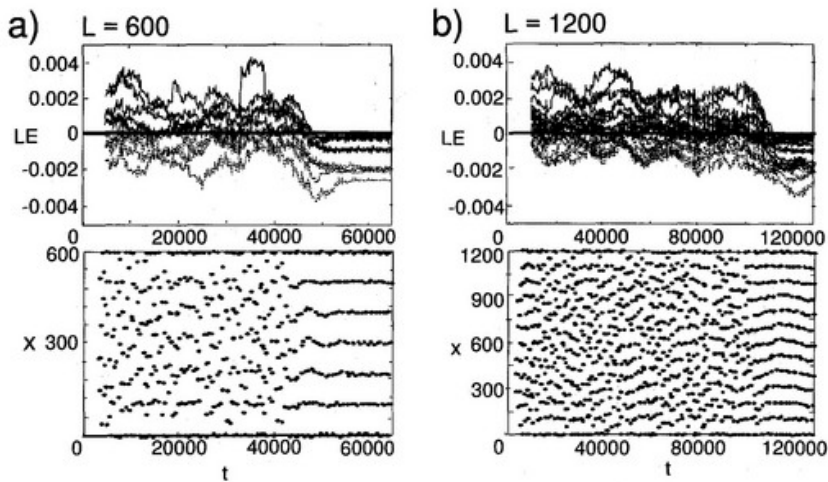


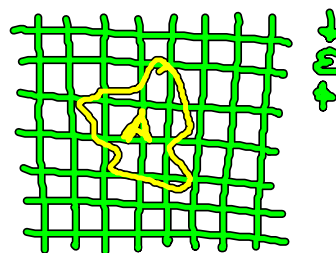
Fig. 2. Transient spatio-temporal chaos for different system sizes (a) $L = 600$ and (b) $L = 1200$. The upper row shows the evolution of the local Lyapunov exponents (LE), and the lower row shows the space-time plot of the maxima of the current density $j = u - a$ ($\alpha = 0.02$, $D = 8.0$, $j_0 = 1.21$, $T = 0.05$).

Quantitative Formulierung der fraktalen Dimension des seltsamen Attraktors

Verallg. Dimensionsbegriff:

Hausdorff-Dimension einer Punktmenge A in \mathbb{R}^n





Sei $N(\epsilon)$ die Mindestzahl von n -dim. Würfeln mit Seitenlänge ϵ , um A zu überdecken. Dann ist



$$d := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}$$

die fraktale (Hausdorff-) Dimension

(d.h. $N(\epsilon) \sim \frac{1}{\epsilon^d}$)

Beispiel:	Punkt	$N(\epsilon) = \text{const}$		$d = 0$
	Linie	$N(\epsilon) \sim \frac{1}{\epsilon}$		$d = 1$
	Fläche	$N(\epsilon) \sim \frac{1}{\epsilon^2}$		$d = 2$
	Vol.	$N(\epsilon) \sim \frac{1}{\epsilon^3}$		$d = 3$

Chaotischer Attraktor in \mathbb{R}^3 : Volumen $\rightarrow 0$

(vgl. Lorenz-Modell)

$\Rightarrow d < 3$; aber $d > 2$: z.B. $d \approx 2.05$

Beispiel: Cantormenge (selbstähnliche Struktur)



$\epsilon = 1 : N = 1$



$\epsilon = \frac{1}{3} : N = 2$



$\epsilon = \frac{1}{9} : N = 4$

...

$\epsilon = \frac{1}{3^n} : N = 2^n$

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon = 1 : N = 1 \\ \epsilon = \frac{1}{3} : N = 2 \\ \epsilon = \frac{1}{9} : N = 4 \\ \dots \\ \epsilon = \frac{1}{3^n} : N = 2^n \end{array} \right\} d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309\dots$$

Beispiel: Koch's Kurve (Schneeflocke)

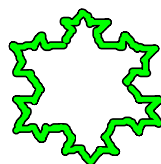


$\epsilon = 1$



$\epsilon = \frac{1}{3}$

$N = 4$



$\epsilon = \frac{1}{9}$

$N = 16$

Umfang $= 3 \cdot 4^n \left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow \infty$

$\Rightarrow d > 1$

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon = \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ N = 4^n \end{array} \right\} d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3}$$

$$1 < d = 1.2618\dots < 2$$

(zwischen Kurve und Fläche)

analog: Märeeskinste