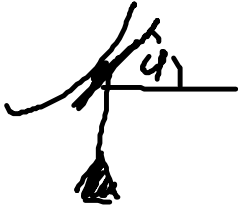


## 2. Kontrollkonzepte

### 2.1 Offene und geschlossene Steuerung

Bsp.: Steuerung Parabolantenne, die auf einem Satelliten gerichtet ist.



$$\text{Bewegungsgl. } \dot{\varphi} = \omega$$

$$J\dot{\omega} = -r\omega + ku$$

$\varphi$  Drehwinkel

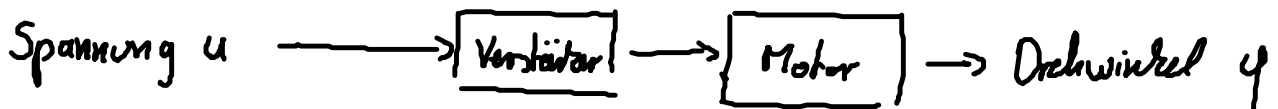
$\omega$  Winkelgeschwindigkeit

Parameter

Trägheitsmoment  $J$

Rückkopplungskoeffizienten  $r$

Verstärkungsfaktor  $k$



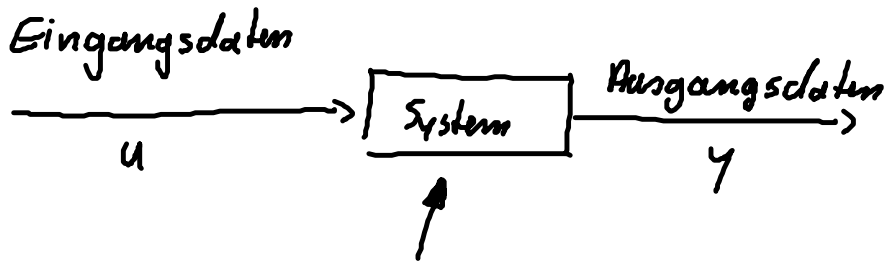
Ziel: Drehwinkel  $\varphi_1$  zur Zeit  $t_1$  durch Spannung  $u$

$\Rightarrow$  Finde  $u(t)$ , so dass eine Lösung des System  $\varphi(t_1) = \varphi_1$  bei Anfangsbedingung  $\varphi(t_0) = \varphi_0$  existiert.

- ⇒ Kriterien: - zeitoptimale Lösung  
- Energieoptimale Lösung

● Theoretische / Mathematische Grundlagen

Schema:



interne Dynamik häufig unbekannt

- Bsp.: Autofahren:
- <sup>Eingänge</sup> Gaspedal
  - Bremsen
  - Lenken

Ausgänge

- Tacho
- Drehzahlmesser

interne Dynamik (Motor  
getriebe)  
unbekannt

Modell:  $\dot{x} = f(x, u)$  mit  $x(t_0) = x_0$   
 $y = g(x, u)$

u: Steuerfunktion

x: Systemzustand

y: messbare Ausgangsgrößen

$\underline{f}$ : funktionaler Zusammenhang des Systems  
 $\underline{g}$ : " " " " der Messung

} evtl. schwierig zu ermitteln  
 interdisziplinäre Zusammenarbeit

Definition: Ein lineares Steuerproblem hat die Form

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}(t)\underline{x}(t) + \underline{B}(t)\underline{u}(t), \quad t \in [t_0, \infty)$$

$$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}(t)\underline{x}(t) + \underline{D}(t)\underline{u}(t) \quad (\text{Ausgangsgleichung})$$

Dabei sind:  $\underline{x}(t) \in \bar{X}$  (Zustandsraum) :  $[t_0 \rightarrow \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$   
 $\underline{y}(t) \in \bar{Y}$  (Ausgangsraum) :  $[t_0 \rightarrow \infty) \rightarrow \mathbb{R}^p$   
 $\underline{u}(t) \in \bar{U}$  (Eingangsraum) :  $[t_0 \rightarrow \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$

$\bar{X}, \bar{Y}, \bar{U}$  sind Mengen von Funktionen, die auf  $[t_0, \infty)$  definiert sind.

$\rightarrow$  für die Matrizen gilt  
 $\underline{A}(t) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$   
 $\underline{B}(t) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n,m}$   
 $\underline{C}(t) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{p,n}$   
 $\underline{D}(t) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{p,m}$

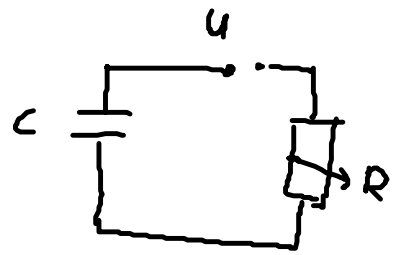
NB: analoges Vorgehen für zeitdiskrete Systeme

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{A}_k \underline{x}_k + \underline{B}_k \underline{u}_k$$

Frage: Zusammenhang Ausgang  $\underline{y}$  und Eingang  $\underline{u}$  ?

→ Transferfunktion

**Bsp.** : elektrischer Schaltkreis



Zustand:  $x(t) = q(t)$  Ladung am Kond.

Eingang:  $u(t) = U(t)$  Spannung

Ausgang:  $y(t) = q(t)$

R Widerstand  
C Kapazität

Zustandsgleichung: Kirchhoffsche Regel

$$\textcircled{I} \quad \dot{q}(t) = -\frac{1}{RC} q(t) + \frac{1}{R} u(t)$$

Vergleich mit Definition liefert:  $\underline{A} = -\frac{1}{RC}$ ,  $\underline{B} = \frac{1}{R}$ ,  $\underline{C} = \underline{A}$ ,  $\underline{D} = 0$

Lösung der Zustandsgleichung

$$\textcircled{II} \quad \overset{\rightarrow}{q}(t) = \exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right) q(t_0) + \frac{1}{R} \int_{t_0}^t \exp\left(-\frac{t-s}{RC}\right) u(s) ds$$

↑  
Anfangsbed.  $t_0$

hier: Lösung der Zustandsgleichung  $\hat{=}$  Ausgangsfunktion

Stabilität: i) asymptotisch stabil: Realteile der Eigenwerte <sup>von  $\underline{A}$</sup>  negativ  
ii) (schwach) stabil: " " nicht positiv

Bsp.:  $\textcircled{I}$  Schaltkreis Eigenwert von  $\underline{A}$ :  $-\frac{1}{RC} < 0$

→ asymptotisch stabil

② Parabolantenne:

$$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\Gamma}{J} \end{pmatrix}}_{= \underline{A}} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K}{J} \end{pmatrix} \underline{u}$$

$$\text{Eigenwerte von } \underline{A}: (-\lambda)(-\frac{\Gamma}{J} - \lambda) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -\frac{\Gamma}{J} < 0$$

→ (schwach) stabil

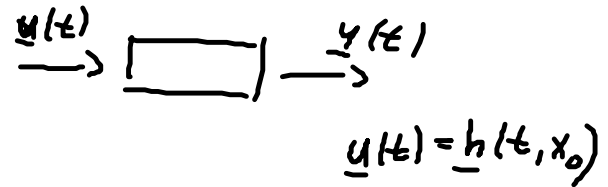
Definition: Gegeben sei das System  $\underline{\dot{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u}$  mit  $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$  und ein Endzustand  $\underline{x}_1$ . Das Paar  $(t_0, \underline{x}_0)$  heißt zur Zeit  $t_1 > t_0$  nach  $\underline{x}_1 = \underline{x}(t_1)$  steuerbar, wenn es eine Steuerung  $\underline{u} \in \bar{U}$  gibt, so dass die Lösung  $\underline{x}(t)$  des Systems mit dieser Steuerung  $\underline{x}_1 = \underline{x}(t_1)$  erfüllt.

Das Paar  $(t_0, \underline{x}_0)$  heißt nach  $\underline{x}_1$  steuerbar, wenn es zu irgendeiner Zeit  $t_1$  ( $t_0 < t_1 < \infty$ ) nach  $\underline{x}_1$  steuerbar ist.

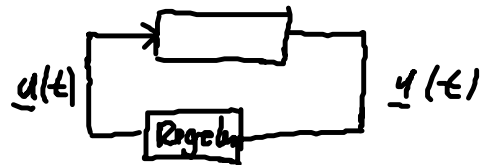
Wenn für jedes  $(t_0, x_0)$  und jedes  $z_1$  das Paar  $(t_0, x_0)$  nach  $z_1$  steuerbar, so heißt das System vollständig steuerbar.

Steuerung vs. Regelung:

- Offener Kreis (Steuerung)



- geschlossener Kreis (Regelung)



oder:  $\underline{u}(t) = -\underline{F}(t) \underline{y}(t)$

oder:  $\underline{u}(t) = \underline{h}(\underline{x}(t))$

Satz: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Das zeitinvariante System:  $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} u(t)$  ist vollständig steuerbar.

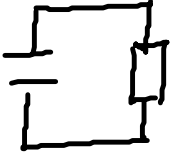
$\begin{matrix} \in \mathbb{R}^m \\ \uparrow \\ \in \mathbb{R}^n \end{matrix}$ 
 $\begin{matrix} \uparrow \\ \in \mathbb{R}^{n,n} \end{matrix}$ 
 $\begin{matrix} \uparrow \\ \in \mathbb{R}^{n,m} \end{matrix}$

(ii) Die Steuerbarkeitsmatrix

$$\underline{K} := \left( \underline{B}, \underline{A}\underline{B}, \underline{A}^2\underline{B}, \dots, \underline{A}^{n-1}\underline{B} \right) \text{ hat Rang } n.$$

(iii) Ist  $\underline{p} \neq 0$  ein Eigenvektor zu  $\underline{A}^T$ , so gilt  $\underline{p}^T \underline{B} \neq 0$

$$(iv) \text{Rang} (\lambda \underline{I} - \underline{A} \underline{B}) = n \quad \forall \lambda$$

Bsp. ①   $\underline{A} = -\frac{1}{RC}$ ,  $\underline{B} = \frac{1}{R}$   $n=1$

$$\Rightarrow \underline{K} = (\underline{B}, \dots, \underline{A}^0 \underline{B}) = \underline{B} = \frac{1}{R} \neq 0$$

$\text{rang } \underline{K} = 1 = n \rightarrow$  Das System ist steuerbar.

② Parabolantenne:  $\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{pmatrix}$ ,  $\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{pmatrix}$   $n=2$

$$\Rightarrow \underline{K} = (\underline{B}, \underline{A} \underline{B}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ \frac{1}{J} & -\frac{1}{J^2} \end{pmatrix}$$

$\text{rang } \underline{K} = 2 \rightarrow$  Das System ist steuerbar.

weitere mögliche Definitionen: - stabilisierbar (Steuerung in Gleichgewichtslage)

- rekonstruierbar (Vergangenheit wiederherstellen)

- beobachtbar ( $\underline{y} = \underline{C} \underline{x}$ )

- entdecibar (Zukunft vorhersagen)

Beweis für Satz: (ii)  $\leftrightarrow$  (iii)  $\leftarrow P^T \underline{B} \neq 0$   
 $\uparrow$

Steuerbarkeitsmatrix hat Rang  $n$

$$\underline{K} := (\underline{B}, \underline{A}\underline{B}, \dots, \underline{A}^{n-1}\underline{B})$$

ii  $\rightarrow$  iii

Annahme:  $\underline{p} \neq 0$  Eigenvektor zu  $\underline{A}^T$  und  $\underline{p}^T \underline{B} = 0$

Dann:  $\underline{p}^T \underline{K} = 0 \rightarrow \text{Rang } \underline{K} \neq n \quad \downarrow$

iii  $\rightarrow$  ii Annahme:  $\text{Rang } \underline{K} \neq n \quad \underline{p}^T \underline{K} = 0$  für  $\underline{p} \neq 0$

dann:  $\underline{p}^T \underline{A}^i \underline{B} = 0$  und somit für  $\underline{p}$  Eigenvektor von  $\underline{A}$

$$\underline{p}^T \underline{A} \underline{B} = \lambda \underline{p}^T \underline{B} = 0 \quad \downarrow$$

## 2.2. Chaoskontrolle

Kriterien für Chaos: - sensitive Abhängigkeit gegenüber Anfangsbedingungen

- lokale Instabilität (positive Lyapunov-Exp)  
bei globaler Begrenzung (seltsamer Attraktor)

- Nichtlinearitäten

- min. Dimension  $n=3$

- wiederkehrende Trajektorien:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T_\varepsilon > 0 : \forall t \geq 0 \quad \exists T(t, \varepsilon) \text{ mit}$$

$$0 < T(t, \varepsilon) < T_\varepsilon \quad | \underline{x}(t + T(t, \varepsilon)) - \underline{x}(t) | < \varepsilon$$



lokale instabile Trajektorien kommen auf  
lange Zeiten beliebig nah.

→ Ansatz für Kontrollmethoden in chaotischen Systemen:

(i) kleine Änderung → große Wirkung  
(Kontrolleingriff) (Veränderung der Stabilität)

(ii) Problem: eventuelle lange Wartezeiten  
bis Trajektorie einem bestimmten  
Punkt des Attraktors erreicht

## 2.2.1 OGY - Kontrolle

Edward Ott }  
also grebogi } damals aus  
James Yorke } Univ. Maryland

Idee: i) Überführung von  $\dot{x} = f(x, u)$  in eine diskrete  
Abbildung (Poincaré - Schnitt)

ii) Kontrolle wirkt nur dann, wenn die  
Trajektorie in der Nähe des Zielzustandes ist.