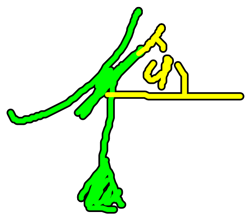
2. Kontrollkonzepte

2.1 Offene und geschlossene Steuerung

Bsp.: Steuerung Parabolantenne, die auf einen Satelliten gerichtet ist.



Bewegungsgl. $\dot{\varphi} = \omega$

$$J\dot{\omega} = -r\omega + ku$$

φ Drehwinkel

ω Winkelgeschwindigkeit

Parameter: Trägheitsmoment J

Reibungskoeffizienten r

Verstärkungsfaktor k

Spannung u $\longrightarrow$ $\boxed{\text{Verstärker}}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\text{Motor}}$ $\longrightarrow$ Drehwinkel φ

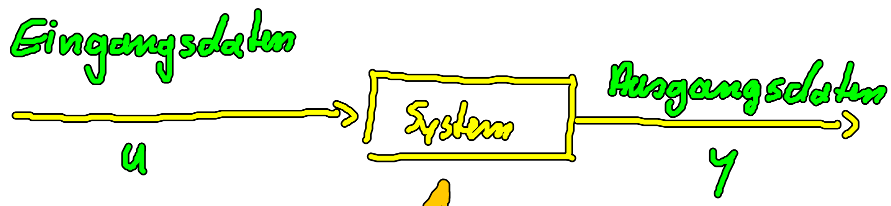
Ziel: Drehwinkel φ_1 zur Zeit t_1 durch Spannung u

$\Rightarrow$ Finde $u(t)$, so dass eine Lösung des System $\varphi(t_1) = \varphi_1$ bei Anfangsbedingung $\varphi(t_0) = \varphi_0$ existiert.

⇒ Kriterium: – zeitoptimale Lösung
– Energieoptimale Lösung

- Theoretische / Mathematische Grundlagen

Schema:



interne Dynamik häufig unbekannt

Bsp.: Autofahren: Eingänge
– Gasgeben
– Bremsen
– Lenken

Ausgänge
– Tacho
– Drehzahlmesser

interne Dynamik (Motor getriebe) unbekannt

Modell:
$$\dot{x} = f(\underline{x}, \underline{u}) \quad \text{mit} \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$
$$\underline{y} = g(\underline{x}, \underline{u})$$

$\underline{u}$: Steuerfunktion
$\underline{x}$: Systemzustand
$\underline{y}$: messbare Ausgangsgrößen

$\underline{f}$: funktionaler Zusammenhang des Systems

$\underline{g}$: " " der Messung

evtl. schwierig zu ermitteln
interdisziplinäre Zusammenarbeit

Definition: Ein Lineares Steuerproblem hat die Form

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}}(t)\underline{x}(t) + \underline{\underline{B}}(t)\underline{u}(t) \quad , \quad t \in [t_0, \infty)$$

$$\underline{x}(t) = x_0$$

$$\underline{y}(t) = \underline{\underline{C}}(t)\underline{x}(t) + \underline{\underline{D}}(t)\underline{u}(t) \quad \text{(Ausgangsgleichung)}$$

Dabei sind:

$\underline{x}(t) \in \overline{\underline{X}}$ (Zustandsraum) : $[t_0 \to \infty) \to \mathbb{R}^n$

$\underline{y}(t) \in \overline{\underline{Y}}$ (Ausgangsraum) : $[t_0 \to \infty) \to \mathbb{R}^p$

$\underline{u}(t) \in \overline{\underline{U}}$ (Eingangsraum) : $[t_0 \to \infty) \to \mathbb{R}^m$

$\overline{\underline{X}}, \overline{\underline{Y}}, \overline{\underline{U}}$ sind Mengen von Funktionen, die auf $[t_0, \infty)$ definiert sind.

→ für die Matrizen gilt

$\underline{\underline{A}}(t) : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^{n,n}$

$\underline{\underline{B}}(t) : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^{n,m}$

$\underline{\underline{C}}(t) : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^{p,n}$

$\underline{\underline{D}}(t) : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^{p,m}$

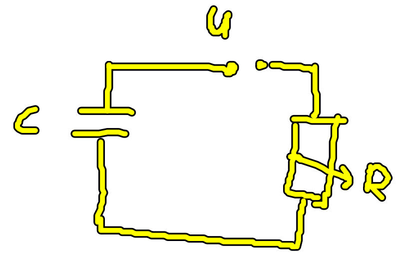
NB: analoges Vorgehen für zeitdiskrete Systeme

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{\underline{A}}_k \underline{x}_k + \underline{\underline{B}}_k \underline{u}_k$$

Frage: Zusammenhang Ausgang $\underline{y}$ und Eingang $\underline{u}$?

→ Transferfunktion

Bsp.: elektrischer Schaltkreis



R Widerstand
C Kapazität

Zustand: $\underline{x}(t) = q(t)$ Ladung am Kond.

Eingang: $\underline{u}(t) = U(t)$ Spannung

Ausgang: $\underline{y}(t) = q(t)$

Zustandsgleichung: Kirchhoffsche Regel

$$\text{(I)} \quad \dot{q}(t) = -\frac{1}{RC}\, q(t) + \frac{1}{R}\, u(t)$$

Vergleich mit Definition liefert: $\underline{A} = -\frac{1}{RC}$, $\underline{B} = \frac{1}{R}$, $\underline{C} = \underline{1}$, $\underline{D} = 0$

Lösung der Zustandsgleichung

$$\overset{\text{(I)}}{\Rightarrow} \quad q(t) = \exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right) \underbrace{q(t_0)}_{\text{Anfangsbed.}} + \frac{1}{R} \int_{t_0}^{t} \exp\left(-\frac{t-s}{RC}\right) u(s)\, ds$$

hier: Lösung der Zustandsgleichung $\hat{=}$ Ausgangsfunktion

Stabilität: i) asymptotisch stabil: Realteile der Eigenwerte von $\underline{A}$ negativ

ii) (schwach) stabil: " " nicht positiv

Bsp.: (1) Schaltkreis Eigenwert von $\underline{A}$: $-\frac{1}{RC} < 0$

$\rightarrow$ asymptotisch stabil

② Parabolantenne:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{r}{J} \end{pmatrix}}_{= \underline{\underline{A}}} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K}{J} \end{pmatrix} \underline{u}$$

Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}$: $(-\lambda)\left(-\frac{r}{J} - \lambda\right) \stackrel{!}{=} 0$

$\rightarrow \lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = -\frac{r}{J} < 0$

$\rightarrow$ (schwach) stabil

Definition: Gegeben sei das System $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,\underline{u}$ mit $\underline{x}(t_0) = x_0$ und ein Endzustand $\underline{x}_1$. Das Paar (t_0, x_0) heißt zur Zeit $t_1 > t_0$ nach $\underline{x}_1 = \underline{x}(t_1)$ steuerbar, wenn es eine Steuerfunktion $\underline{u} \in \overline{\underline{U}}$ gibt, so dass die Lösungen $\underline{x}(t)$ des Systems mit dieser Steuerung $\underline{x}_1 = \underline{x}(t_1)$ erfüllt.

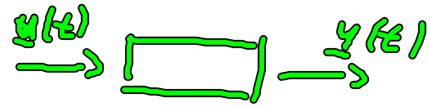
Das Paar (t_0, x_0) heißt nach $\underline{x}_1$ steuerbar, wenn es zu irgendeiner Zeit t_1 $(t_0 < t_1 < \infty)$ nach $\underline{x}_1$ steuerbar ist.

Wenn für jedes (t_0, x_0) und jedes $\underline{x}_1$ das Paar (t_0, x_0) nach $\underline{x}_1$ steuerbar, so heißt das System

vollständig steuerbar.

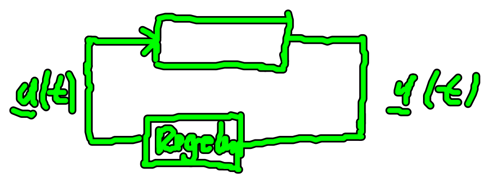
Steuerung vs. Regelung:

- Offener Kreis (Steuerung)



$$\underline{u}(t) = \underline{h}(t, x_0)$$

- geschlossener Kreis (Regelung)



etwa: $\underline{u}(t) = -\underline{\underline{F}}(t)\,\underline{y}(t)$

oder: $\underline{u}(t) = \underline{h}(\underline{x}(t))$

Satz: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

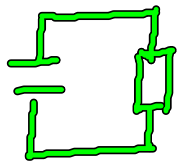
(i) Das zeitinvariante System: $\underbrace{\dot{\underline{x}}(t)}_{\in\mathbb{R}^n} = \underbrace{\underline{\underline{A}}}_{\in\mathbb{R}^{n,n}}\, x(t) + \underbrace{\underline{\underline{B}}}_{\mathbb{R}^{n,m}}\, \overbrace{u(t)}^{\in\mathbb{R}^m}$ ist vollständig steuerbar.

(ii) Die Steuerbarkeitsmatrix

$$\underline{\underline{K}} := \left(\underline{\underline{B}}, \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}, \underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{B}}, \dots, \underline{\underline{A}}^{n-1}\underline{\underline{B}}\right)$$ hat Rang n.

(iii) Ist $\underline{p} \neq 0$ ein Eigenvektor zu $\underline{\underline{A}}^T$, so gilt $\underline{p}^T\underline{\underline{B}} \neq 0$

(iv) Rang $\left(\lambda \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{B}} \right) = n \qquad \forall \lambda$

Bsp. ①  $\underline{\underline{A}} = -\frac{1}{RC}, \quad \underline{\underline{B}} = \frac{1}{R} \qquad n = 1$

$$\Rightarrow \underline{\underline{K}} = \left(\underline{\underline{B}}, \dots, \underline{\underline{A}}^0 \underline{\underline{B}} \right) = \underline{\underline{B}} = \frac{1}{R} \neq 0$$

rang $\underline{\underline{K}} = 1 = n \quad \rightarrow$ Das System ist steuerbar.

② Parabolantenne: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{r}{J} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K}{J} \end{pmatrix} \qquad n = 2$

$$\Rightarrow \underline{\underline{K}} = \left(\underline{\underline{B}}, \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{K}{J} \\ \frac{K}{J} & -\frac{rK}{J^2} \end{pmatrix}$$

rang $\underline{\underline{K}} = 2 \quad \rightarrow$ Das System ist steuerbar.

weitere mögliche Definitionen: – stabilisierbar (Steuerung in Gleichgewichtslage)

– rekonstruierbar (Vergangenheit wiederherstellen)

– beobachtbar ($\underline{y} = \underline{\underline{C}}\,\underline{X}$)

– entdeckbar (Zukunft vorhersagen)

Beweis für Satz: (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\leftarrow p^T \underline{\underline{B}} \neq 0$

$\uparrow$

Steuerbarkeitsmatrix hat Rang n

$$\underline{\underline{K}} := (\underline{\underline{B}}, \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}, \ldots \underline{\underline{A}}^{n-1}\underline{\underline{B}})$$

ii → iii

Annahme: $\underline{p} \neq 0$ Eigenvektor zu $\underline{\underline{A}}^T$ und $\underline{p}^T\underline{\underline{B}} = 0$

Dann: $\underline{p}^T\underline{\underline{K}} = 0 \rightarrow$ Rang $\underline{\underline{K}} \neq n$. ↯

iii → ii Annahme: Rang $\underline{\underline{K}} \neq n$ $\quad \underline{p}^T\underline{\underline{K}} = 0$ für $\underline{p} \neq 0$

dann: $\underline{p}^T\underline{\underline{A}}^i\underline{\underline{B}} = 0$ und somit für $\underline{p}$ Eigenvektor von $\underline{\underline{A}}$

$$\underline{p}^T\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \lambda\,\underline{p}^T\underline{\underline{B}} = 0 \quad ↯$$

2.2. Chaoskontrolle

Kriterien für Chaos:
- sensitive Abhängigkeit gegenüber Anfangsbedingungen
- lokale Instabilität (positive Lyapunov-Exp) bei globaler Begrenzung (seltsamer Attraktoren)
- Nichtlinearitäten
- min. Dimension $n = 3$
- wiederkehrende Trajektorien:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists T_\varepsilon > 0 : \forall_t \geq 0 \; \exists T(t,\varepsilon) \text{ mit}$$

$$0 < T(t,\varepsilon) < T_\varepsilon \qquad |\underline{x}(t + T(t,\varepsilon)) - x(t)| < \varepsilon$$

lokale instabile Trajektorien kommen auf lange Zeiten beliebig nah.

→ Ansatz für Kontrollmethoden in chaotischen Systemen:

(i) kleine Änderung → große Wirkung
(Kontrolleingriff) (Veränderung der Stabilität)

(ii) Problem: eventuelle lange Wartezeiten bis Trajektorie einen bestimmten Punkt des Attraktors erreicht

2.2.1 OGY-Kontrolle

Edward Ott
Celso Grebogi
James Yorke
} damals aus Univ. Maryland

Idee: i) Überführung von $\dot{\underline{x}} = f(x, u)$ in eine diskrete Abbildung (Poincaré-Schnitt)

ii) Kontrolle wirkt nur dann, wenn die Trajektorie in der Nähe des Zielzustandes ist.