Nachtrag zur Stabilisierbarkeit von dyn. Systemen (2.1.)

Literatur:

① "Regelungstechnik 2
Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung"
Jan Lunze
Springer Lehrbuch 2008

② Skript v. Mehrmann
www3.math.tu-berlin.de/
Vorlesungen/SS11/Kontrolltheorie

Ausgangspunkt:

System

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \quad \text{Eingang}$$

$$\text{Ausgang} \quad y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)$$

⇒ Steuerbar ⟺ beliebige Werte x können durch u erzeugt werden

Lösung der DGL

$$x_e = e^{At_e} x_0 + \int_0^{t_e} e^{A(t_e-\tau)} B\,u(\tau)\,d\tau$$

$\begin{pmatrix} x_e = x(t_e) & \text{Endpunkt} \\ x_0 = x(t_0) & \text{Start} \end{pmatrix}$

sei $x_e = 0$

$$e^{-A\tau} = 1 - A\tau + A^2\frac{\tau^2}{2!} + \dots$$

$$-e^{At_e} x_0 = e^{At_e} \int_0^{t_e} e^{-A\tau} \, B \, u(\tau) \, d\tau$$

$$-x_0 = \int_0^{t_e} B \, u(\tau) \, d\tau - \int_0^{t_e} A B \, \tau \, u(\tau) \, d\tau + \int_0^{t_e} A^2 B \frac{\tau^2}{2!} \, d\tau - \dots$$

$$\longleftarrow \qquad u_i = (-1)^i \int_0^{t_e} \frac{\tau^i}{i!} \, u(\tau) \, d\tau$$

$$-x_0 = \underbrace{B}_{v_1} u_0 + \underbrace{AB}_{v_2} u_1 + \underbrace{A^2 B}_{v_3} u_2 + \dots$$

Ein beliebiger Vektor x_0 kann nur dann erzeugt werden, wenn die Vektoren v_i den Phasenraum aufspannen.

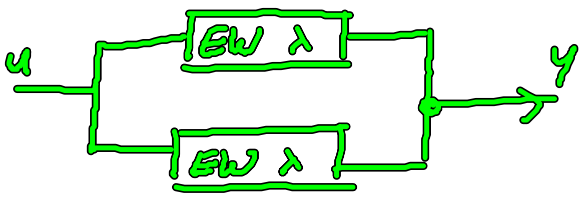
(Bem. A^n und alle höheren Potenzen sind Linearkombination von den niedrigeren Potenzen
Cayley Hamilton)

$$\Rightarrow \text{Rang}\left(B, AB, \dots A^{n-1} B\right) = n$$

Kalman Kriterium

Bem: steuerbar heißt NICHT das das System in dem Zustand bleibt!

Bsp.: Nicht steuerbares System



Parallelschaltung

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ nicht steuerbar

Alternative Def. der Steuerbarkeit

- System in Normalform gegeben
  steuerbar wenn $\underline{\underline{B}}$ keine Nullzeile besitzt & die Zeilen von $\underline{\underline{B}}$ die zum gleichen EW gehören linear unabhängig sind

$\boxed{\text{Bsp}}$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} x + \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}} u$$

$$\underbrace{\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\text{alle in der } x_2, x_3 \text{ Ebene}} \qquad \text{Rang}(K) = 2 < 3$$

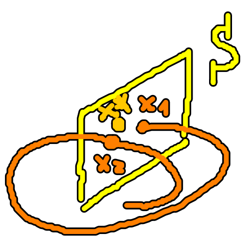
→ nicht vollständig steuerbar

→ nur diese Punkte kann man ansteuern

2.2.1 OGY Kontrolle

: "Controlling chaos", Physical Review Letters 64 1196 (1990)

Poincaré-Abbildung $\underline{x} \to \underline{P}(\underline{x}, \underline{u})$ mit $\underline{P}(\underline{x}, u)$ der 1. Wiederkehrpunkt auf Fläche S (Durchstoßpunkte)



$\underline{\tilde{x}}_k = \underline{x}_k - \underline{x}^*$

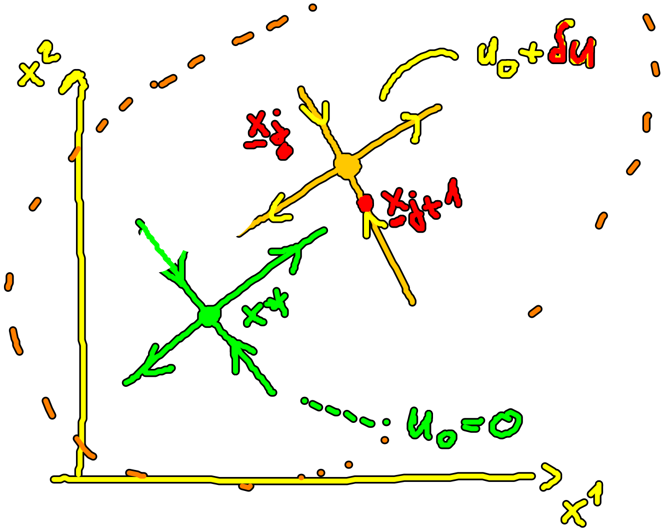
→ Folge von Punkten $\underline{x}_{k+1} = \underline{P}(x_k, u_k)$

$\underline{x}_k = \underline{x}(t_k)$

t_k Zeit des k-ten Durchstoßens

$u_k = \underline{u}(t)$ konstant für $t \in [t_k, t_{k+1})$

→ DGL $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u})$ ersetzt durch diskrete Abbildung $\underline{\tilde{x}}_{k+1} = \underline{P}(\underline{\tilde{x}}_k, \underline{u}_k)$ mit $\underline{\tilde{x}}_k = \underline{x}_k - \underline{x}^*$



Koordinaten in S

Idee: Fixpunkt auf S so verschieben, dass nächstes x_{j+1} auf stab. Mannigfaltigkeit landet.

Kontrolle möglich wenn es ein δu zu jedem $\underline{x}_j$ in der Nähe von $\underline{x}^*$.

<u>Linearisierung</u> des Systems in der Nähe des Kontrollpunktes

$$\tilde{\underline{x}}_{k+1} = \left.\frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{x}}\right|_{\underline{x}^*} \tilde{\underline{x}}_k + \left.\frac{\partial \underline{P}}{\partial u}\right|_{u_0} (u-u_0)$$

u sei skalar

Verbindung von u mit Systemzustand $\underline{x}_k$?

<u>Ansatz</u>:

$$u_k = \begin{cases} u_0 - \underline{c}\,\tilde{\underline{x}}_k & \text{wenn } |\tilde{\underline{x}}_k| \leq \Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Leftarrow \quad \tilde{x}_k = c_1[x_j^1 - x^{*1}] + c_2[x_j^2 - x^{*2}]$$

Fixpunkt stabil wenn die Beträge der Eigenwerte der Jakobimatrix der Map kleiner als 1 sind.

$$\underline{\underline{A}}^M = \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{x}} + \frac{\partial \underline{P}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \underline{x}}$$

$$= \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x^1} - \frac{\partial P_1}{\partial u} c_1 & \frac{\partial P_1}{\partial x_2} - \frac{\partial P_1}{\partial u} c_2 \\ \frac{\partial P_2}{\partial x^2} - \frac{\partial P_2}{\partial u} c_1 & \frac{\partial P_2}{\partial x_2} - \frac{\partial P_2}{\partial u} c_2 \end{pmatrix}\right|_{\substack{x^* \\ u_0}}$$

=> Bedingung für Eigenwerte liefert Beziehung

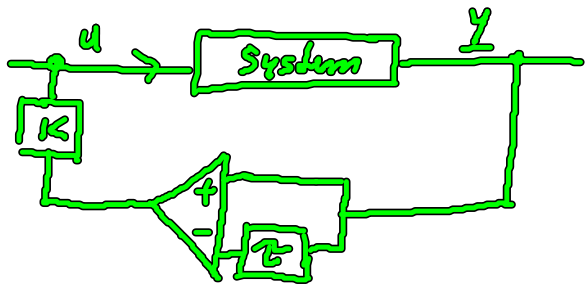
$c_1(\underline{x}^*, u_0)$

$c_2(\underline{x}^*, u_0)$

Nachteile:
- evtl. Wartezeiten
- Kenntnis vom Ziel x^* nötig
- Poincaré Schnitt in Realität schlecht zu bestimmen

2.2.2. Zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle

Schema:



K. Pyragas: Phys. Rev. Lett A 170, 421 (1992)

• „time-delayed feedback" oder Pyragas Kontrolle

Idee: Verwende statt $\underline{x}^*$ eine zeitverzögerte Version des Ausgangs $y(t)$: $y(t-\tau)$

Pyragas-Kontrolle: $\dot{\underline{x}} = f(x) + \underline{\underline{K}}\,(y(t) - y(t-\tau))$

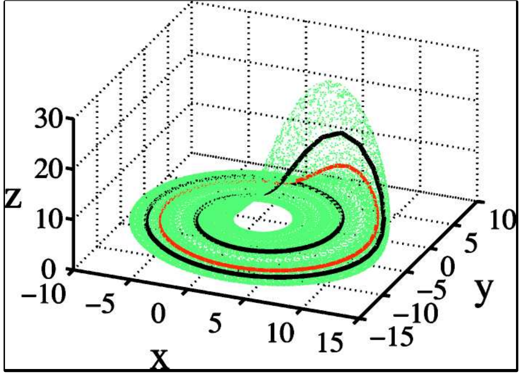
Vorteil: – keine Kenntnis des Zielzustandes nötig

– Nichtinvasiv;

Bsp.: i) Stabilisierung eines instabilen Orbits mit Periode T, bei Wahl von $\tau = T$ gilt bei erfolgreicher Stabilisierung $x(t) = x(t-\tau)$

$\rightarrow \underline{u} = 0$

ii) Stabilisierung von Fixpunkten



Rössler System:

Balanov, Janson, Schöll
Phys. Rev. E 71, 016222 (2005)

2.2.3 Adaptive Kontrolle

Finde u so dass bestimmte Kostenfunktion Q minimal wird.

Betrachte $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u}, t)$ mit $Q(x,t)$

und $\lim\limits_{t\to\infty} Q(\underline{x}, t) = 0$

$$Q(x,t) = \frac{1}{2}\left(\underline{x}(t) - \underline{x}(t-\tau)\right)^2$$

Frage: Wie verknüpfe ich Q mit Kontrolle $\underline{u}$?

Idee: Herleitung einer zusätzlichen DGL für $\underline{u}$, die Änderung von Q berücksichtigt.

(speed gradient method)

„Speed of Q": $\dot{Q} = \omega(\underline{x}, \underline{u}, t)$

$$\dot{Q}(x(t), t) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \underline{\nabla}_x Q(x,t)\, \dot{\underline{x}}$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial t} + \underline{\nabla}_x Q(x,t)\, \underline{f}(\underline{x},\underline{u},t)$$

Daraus folgt

$$\underline{\nabla}_u \dot{Q} = \underline{\nabla}_x Q(\underline{x},t) \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}}$$

Ansatz für
DGL für $\underline{u}$:

$$\dot{\underline{u}} = -\Gamma\, \underline{\nabla}_u \dot{Q}(\underline{x},\underline{u},t)$$

Funktionalert zur Herleitung einer Gleichung für Kontrollparameter.

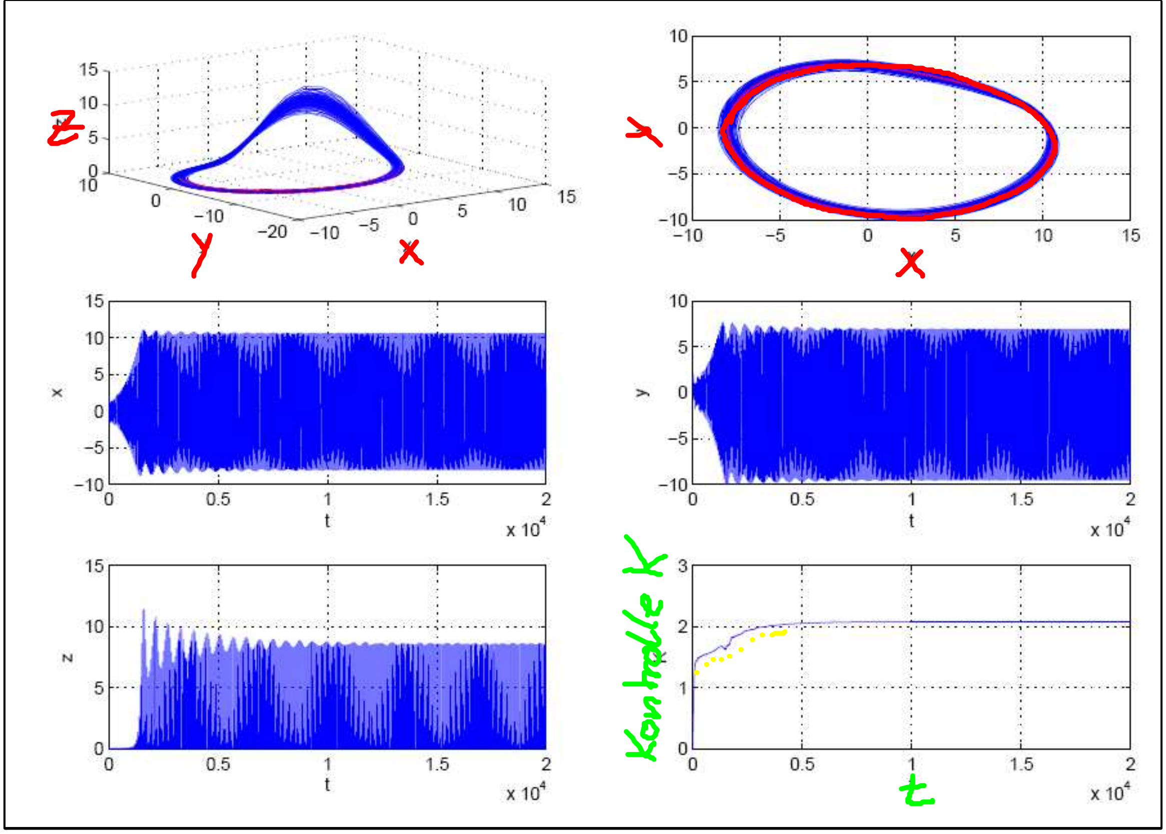
$\boxed{\text{Bsp.}}$ $u(t) = -K[x(t) - x(t-\tau)]$ Pyragas

angewendet auf Rössler System

$$\dot{x} = -y - z - K(x - x(t-\tau))$$
$$\dot{y} = x + ay$$
$$\dot{z} = b + z(x-\mu)$$

$$\dot{K} = -\Gamma\, \underline{\nabla}_k \dot{Q} \qquad \text{wobei } Q(x) = \frac{1}{2}(x(t) - x(t-\tau))^2$$

$$\ldots\ldots \Rightarrow \dot{K} = \Gamma\big(x(t) - x(t-\tau)\big)\big[x(t) - 2x(t-\tau) + x(t-2\tau)\big]$$



z
y
x
Kontrolle K
t
x 10^4