

## 2.4. Quantenkontrolle

Klass. Anwendung adaptiver Kontrolle:

Kostenfkt. enthält Hamilton-Fkt.:  $Q(q,p) = \frac{1}{2} (H(q,p) - H_*)$   
mit  $H_*$  als Zielenergie

quantenmechanische Systeme:

$$\text{Schrödinger-Gl. } i\hbar \dot{\psi} = \left( H_0 + \underbrace{\sum_{k=1}^m u_k H_k}_{\text{Kontroll-Hamiltonop.}} \right) \psi$$

↑  
ohne Kontrolle (freies System)      Kontroll-Hamiltonop. (Kontrollpar.  $u_k$ )

Ziel: Konstruiere  $u_k$ , so dass Observab.  $Z$  im Mittel einen vorgegebenen Wert  $Z_*$  annimmt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{\psi^*(t) Z \psi(t)} = Z_*$$

Skalarprodukt  $\int \psi^* Z \psi d^3r \equiv (\psi, Z\psi) = \langle \psi | Z | \psi \rangle$

Idee: Speed gradient method anwenden:

$$Q(\psi) = (\psi^* Z \psi - Z_*)^2$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(\psi) = 0$$

Ann.:  $Z$  kommutiert mit  $H_0$  (gleichzeitig schauf messbar,  
keine Beeinflussung des qu. Systems nur durch  
Messung von  $Q$ )

$$\nabla_{u_k} \dot{Q} = \nabla_{u_k} [2(\psi^* Z \psi - Z_*)(\psi^* Z \dot{\psi} + \dot{\psi}^* Z \psi)]$$

$$= \nabla_{u_k} \left[ 2 (\varphi^* z_\varphi - z_\varphi) \frac{i}{\hbar} \varphi^* (H_0 z - z H_0 + \sum_{k=1}^n u_k (H_k z - z H_k)) \varphi \right]$$

$$\text{mit } \dot{\varphi} = -\frac{i}{\hbar} (H_0 + \sum_k u_k H_k) \varphi$$

$$\Rightarrow \dot{u}_k = -\Gamma \nabla_{-u_k} \dot{Q} = -\Gamma \frac{\partial}{\partial u_k} (2 (\varphi^* z_\varphi - z_\varphi) (\varphi^* (H_k z - z H_k) \varphi))$$

$\Rightarrow$  adaptive Gl. für Kontrollpar.  $u_k$

Anwendung: Kontrolle chem. Reaktionen auf molekularer Ebene:

Kontrolle durch speziell gefonte Laserpulse, die gewünschte Reaktionskanäle öffnen.

Lit. z.B. T. Braxner (Würzburg):

Phys. Chem. Chem. Phys. 9, 2470 (2007)

Chem. Phys. Chem. 4, 418 (2003)

### 3. Zeitverzögerte Rückkopplungsverfahren

#### 3.1 Retardierte komplexe Systeme

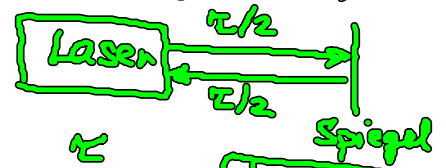
Delay-Differenzialgl.:  $\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t-\tau))$

Verzögerungszeit  $\tau$

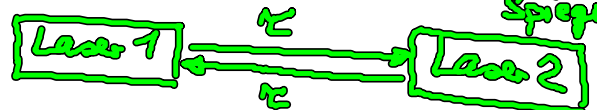
Delay (Retardierung) ist weitverbreitet in nichtlin. Syst.

- mech. Systeme: Trägheit
- elektron. Stromkreise: Signalverarbeitungszeiten (Latenzen), kapazitive Effekte
- optische Systeme: Signallaufzeiten (Lichtgeschw.)

- Laser mit opt. Rückkoppl.



- 2 gekoppelte Laser

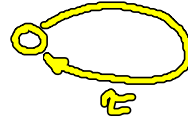


- biolog. Systeme: Zell-Zyklus-Zeit  $\tau$   
biolog. Uhren

- neuronale Netzwerke: zeitverzögerte Kopplung



zeitverzögerte Rückkopplung



z.B. biochem. Prozesse  
(Neurotransmitter)  
neuro-vaskuläre Koppl.

Retardierung generiert reichhaltigeres komplexes Verhalten

- Retardierung erhöht die Phasenraumdim. einer ODE (ordinary diff. eqs.) auf unendlich.  
Anfangsbed. auf ganzem Intervall  $[-\tau, 0]$  notwendig  
history function  $x(t)$  auf  $-\tau \leq t \leq 0$
- Einfache Dgl. produzieren komplexes nichtlin. Verhalten
  - delay-induzierte Bifurkationen, Instabilitäten
  - delay-induzierte Multistabilität
  - Stabilisierung von instab. period. oder stat. Zuständen
  - Chaoskontrolle (Unterdrückung von Chaos)

Lit.: T. Erneux: Applied delay differential eqs. (Springer 2003)

P. Hövel: Control of Complex Nonlin. Systems with Delay (Springer 2010)

V. Flunkert: Delay-Coupled Complex Systems (Springer 2011)

Just, Palster, Schanz, Schöll (eds): Delayed complex systems  
(Theme Issue of Phil. Trans. Roy. Soc. A 368 (2010))

### 3.2 lin. Stabilitätsanalyse retardierte Diff. gln

einfachste lin. Delay-Dgl.  $\dot{x} = -ax(t) + bx(t-\tau)$   $a, b \in \mathbb{R}$

Auf. bed.  $x(t) = \phi(t)$   $-\tau \leq t \leq 0$

Fixpt.  $x^* = 0$

keine Störung:  $x(t) \sim e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \lambda e^{\lambda t} = -a e^{\lambda t} + b e^{\lambda t - \lambda \tau}$$

$$\lambda = -a + b e^{-\lambda \tau} \quad \text{transzendente char. Gf. für Eigenwert } \lambda \in \mathbb{C}$$

lösung für  $\lambda$ :  $\underbrace{(\lambda + a)\tau}_z = b \tau e^{-\lambda \tau}$

$$z e^z = b \tau e^{a\tau}$$

inverse Fkt. von  $z e^z = y$  :  $z = W_l(y)$  Lambert-Fkt.

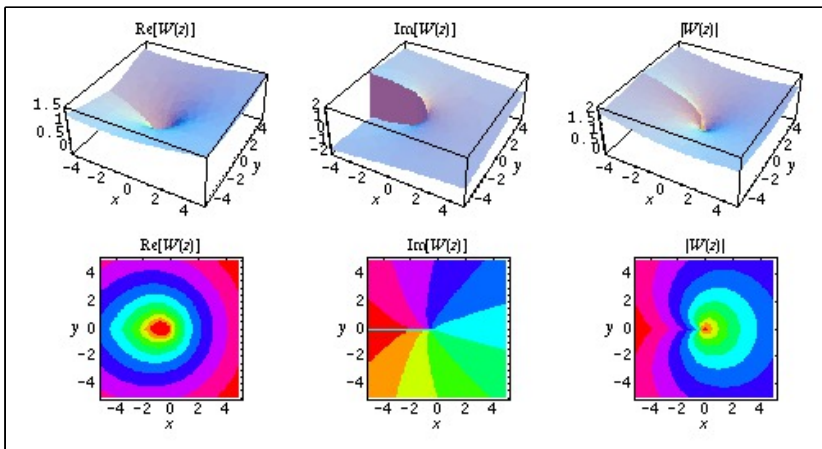
(vielblättrig,  $l \in \mathbb{Z}$ )

(cf  $e^z = y \Leftrightarrow z = \ln y$ )

$$\Rightarrow \lambda_l = -a + \frac{1}{\tau} W_l(b \tau e^{a\tau})$$

( $a > 0$ : stab. Fixp. ohne Delay)  
 ( $a < 0$ : inst. " " " " )

allg. lös.  $x(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{\lambda_l t}$



Hauptzweig

$$W_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} z^n$$

( $|z| < \frac{1}{e}$ )

asymptot. Entwicklung für  $z \rightarrow 0$  u.  $z \rightarrow \infty$  ( $l \neq 0$ )

$$W_l(z) \approx \ln z + 2\pi i l$$

$$- \ln(\ln z + 2\pi i l)$$

$\tau \rightarrow 0$  ( $z \rightarrow 0$ ):

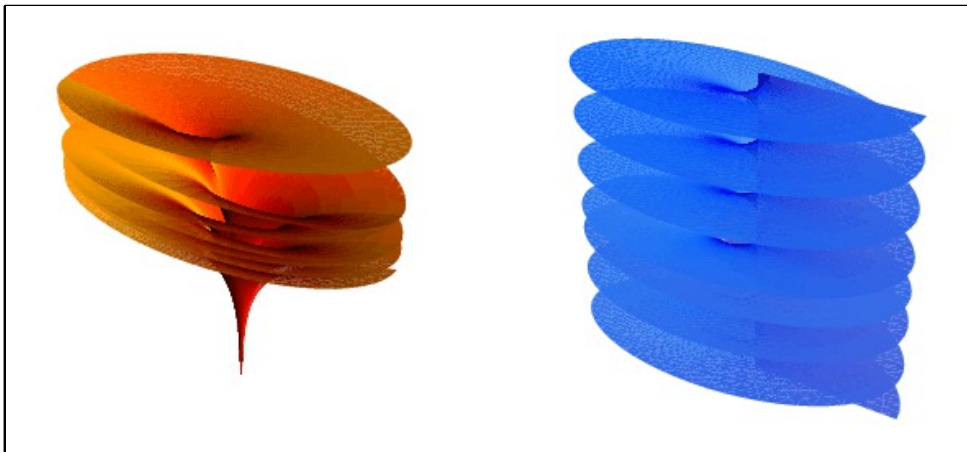
$$W_l(z) \approx \ln z + 2\pi i l + \text{höher. Ord.}$$

$\downarrow$   
 $-\infty$

$$\lambda_l \rightarrow -\infty \quad \forall l \neq 0$$

Re W(z)

Im W(z)



$$\tau \rightarrow \infty \quad (z \rightarrow \infty) : \lambda_2 \approx -a + \frac{1}{\tau} [\ln(b\tau) + a\tau + 2\pi i l - \ln(4z + 2\pi i l)]$$

Lit. Amann, Schöll, Just : Physica A 373, 191 (2007)