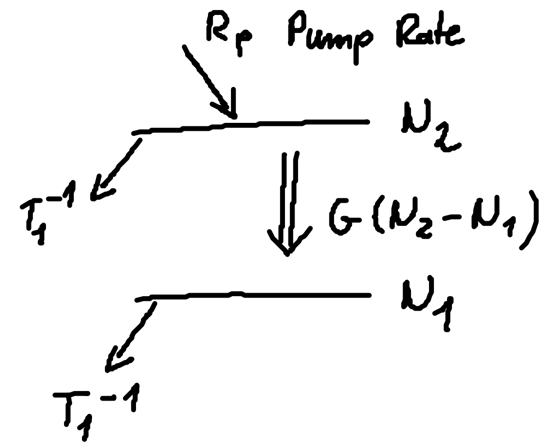
4. Nichtlineare Dynamik am Beispiel des Lasers

4.1. Laser Ratengleichungen

4.1.1. 2 Variablen System (phänomenologischer Ansatz)



Photonenzahl $\frac{dN_{ph}}{dt'} = G\bar{D}N_{ph} - \frac{N_{ph}}{\tau_{ph}}$

Inversion: $\frac{d\bar{D}}{dt'} = -\frac{1}{T_1}(\bar{D} - \underbrace{\bar{D}_0}_{\bar{D}_0 = R_p T_1}) - 2G\bar{D}N_{ph}$

Inversion $\bar{D} = (N_2 - N_1)$

τ_{ph}: Lebensdauer der Photonen in der Kavität

Dimensionslose Formulierung

$$I = 2GT_1 N_{ph}$$

$$D = G\tau_{ph}\bar{D}$$

$$t = \frac{t'}{\tau_{ph}}$$

Zeitskalenparameter $\boxed{\gamma = \frac{\tau_{ph}}{T_1}}$

$$\dot{I} = I(D-1)$$

$$\dot{D} = \gamma\,(P - D(1+I))$$

effektiver Pump Parameter

$P = G \tau_{ph} R_p T_1$

Größenordnungen

Laser	τ_{ph}	T_1	γ_1
CO_2	10^{-8}	$4 \cdot 10^{-6}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$
Festkörper	10^{-6}	$2.3 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-3}$
Halbleiter GaAs	10^{-12}	10^{-9}	10^{-3}
HeNe			> 1

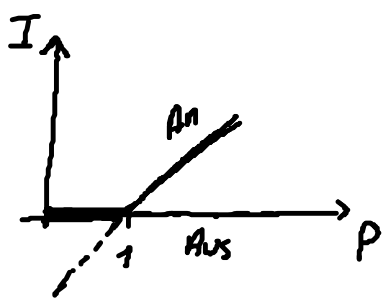
führt zu schlechten Stabilitätseigenschaften

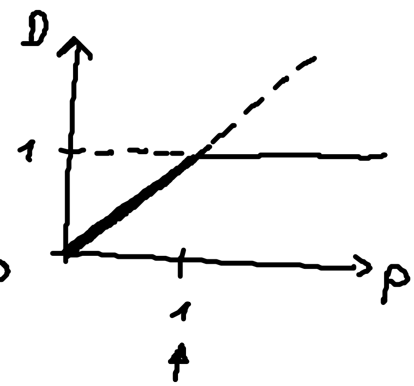
Fixpunkte

2 Lösungen

① $I = 0$ & $D = P$

② $I = P - 1$ & $D = 1$





Laserschwelle

transkritische Bifurkation

Stabilität

Jakobi Matrix

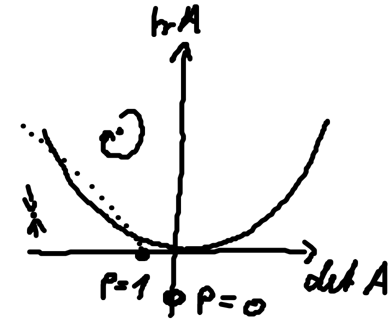
$$A = \begin{pmatrix} D-1 & I \\ -D\gamma_1 & -(1+I)\gamma_1 \end{pmatrix}$$

① $\lambda_1 = P - 1$ stabil für $P < 1$

$\lambda_2 = -\gamma_1$

② $\lambda^2 + \gamma P \lambda + \gamma (P-1) = 0$

$$\mathrm{tr}\,A = -\gamma P \quad < 0 \quad \text{für } P > 0$$
$$\det A = \gamma (P-1) \quad > 0 \quad \text{für } P > 1$$



$$\lambda_{12} = -\gamma \frac{P}{2} \pm i \sqrt{\underbrace{\overbrace{\gamma(P-1)}^{x_0} - \overbrace{\gamma^2 \frac{P^2}{4}}^{\Delta x}}_{\text{wenn } > 0}}$$

wenn > 0 $\longrightarrow$ Fixpunkt ist Fokus

Für kleine γ (P fest) Taylor um x_0

$\Rightarrow$
$$\lambda_{1,2} = -\gamma \frac{P}{2} \pm i \sqrt{\gamma(P-1)} \quad + \quad O(\gamma^{3/2})$$

$$\uparrow \ \frac{1}{\sqrt{x_0}} \Delta x \sim \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \gamma^2$$

$$\left[\, f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \frac{1}{2} \Delta x \, f'(x_0) \,\right]$$

$\Rightarrow$ Lösung in der Nähe des Fixpunktes (γ klein)

$$\delta I = I - (P-1) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$
$$= c\, \underbrace{e^{-\frac{\gamma}{2} P t}} \sin\big(\underbrace{\sqrt{\gamma(P-1)}}\, t + \phi\big)$$

Dämpfungsrate $\Gamma = \gamma \frac{P}{2}$

Relaxations-Oszillations Frequenz $\omega_R = \sqrt{\gamma(P-1)}$

- Bem.
  - gedämpfte RO Oszillationen
  - schwach stabiler Fixpunkt

$$\omega_R^2 = 2\Gamma - \gamma$$

$$\Downarrow$$

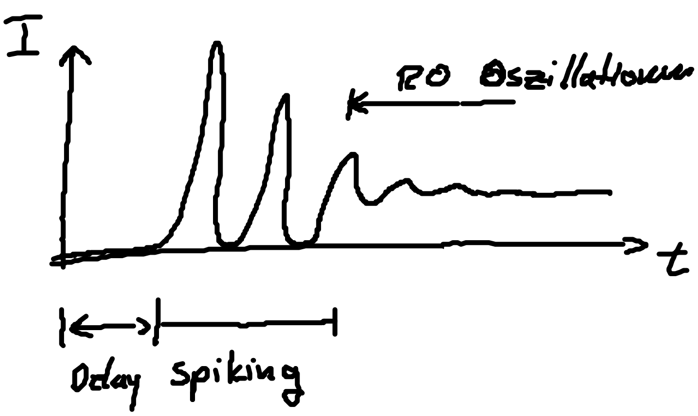
2 verschiedene Zeitskalen im System $t_1 = \sqrt{\gamma(P-1)}\,t$

$t_2 = \gamma \frac{P}{2}\, t$

- Experiment

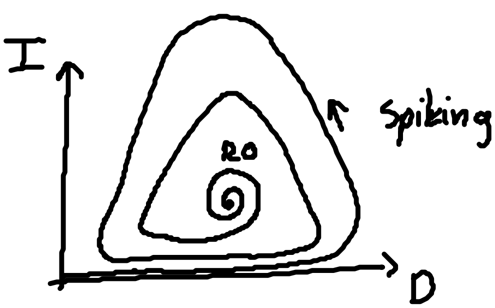
(Zeit mit Dimension $\quad f_R = \sqrt{\frac{P-1}{T_1 \tau_{ph}}} \qquad \Gamma_D = \frac{P}{2T_1}$)

- Einschwingvorgang (Messung)



Class B Laser
(γ klein)

- Phasenraum



$$D = \frac{\dot{I}}{I} + 1$$

(indirekte Messung der Inversion)

4.1.2. Beschreibung des Lasers mit elektrischem Feld

$\tilde{E}$: komplexes Feld

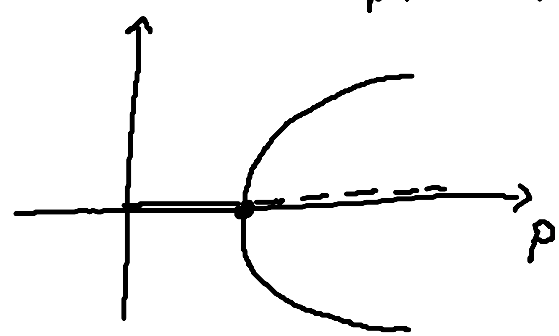
(Herleitung aus Maxwell-Bloch-Gl. mit Eliminieren von P)

$$\dot{\tilde{E}} = \frac{1}{2} G \tilde{D} \tilde{E} - \frac{\tilde{E}}{2\tau_{ph}} \qquad N_{ph} \approx |\tilde{E}|^2$$

$E = \sqrt{2GT_1}\,\tilde{E}$ (dimensionslos)

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{II}_1 \quad \dot{E} = \frac{1}{2} E (D-1) \\ &\mathrm{II}_2 \quad \dot{D} = \gamma \left(P - D(1+E^2) \right) \end{aligned}}$$

Stimmgabel-Bif.
superkritisch



Lösungen ① $E = 0 \quad D = P$

② $E = \pm\sqrt{P-1} \quad D = 1$

- Fall γ groß

- D ändert sich ganz schnell und ist wenn sich E ändert schon konstant
- D folgt sofort jeder Änderung von E

Versklavungsprinzip (Haken)

adiabatisches Eliminieren

$\Rightarrow \dot{D} = 0$

II_2: $\dot{D} = 0$

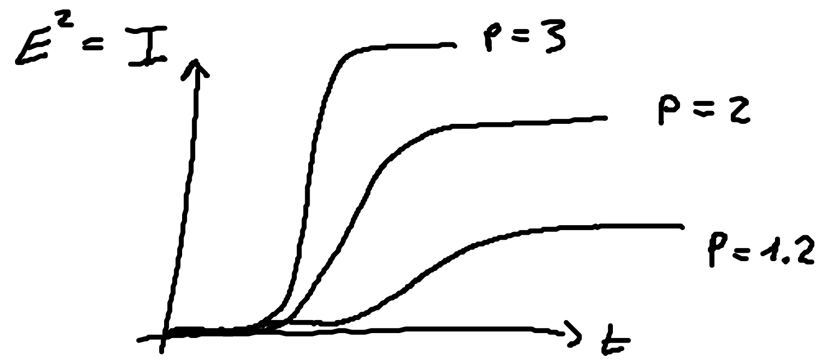
$D(1+E^2) = P \quad \longrightarrow \quad D = \frac{P}{1+E^2}$ (statischer Zusammenhang)

Class A Laser

II_1: $\boxed{\dot{E} = \frac{1}{2} E \left(\frac{P}{1+E^2} - 1 \right)}$

$A = -(P-1) < 0$

$\longrightarrow$ Nur noch ein dynamischer Freiheitsgrad mit Zeitskala $\tau = \frac{1}{P-1}$



• kritische Verlangsamung am Bifurkationspunkt $P = 1$

(μ groß)

4.2. Normalform der Laser gleichung in der Nähe der Schwelle

• Suche einfache Amplitudengleichung für Laser bei $P \approx 1$

(für beliebiges μ)

• Idee: Störungstheorie mit Vielzeitenansatz

Erinnerung: 2 Zeitskalen im System $\lambda_1 = -\gamma P + \frac{P-1}{P}$ ⊛

$\lambda_2 = -\frac{P-1}{P}$

$P \to 1 \implies \lambda_2$ klein

Entwicklung für $P-1$ sehr klein

$$⊛ \lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2}P \pm i\sqrt{\underbrace{\gamma(P-1)}_{\Delta x} - \underbrace{\gamma^2\frac{P^2}{4}}_{x_0}}$$

$$= -\frac{\gamma}{2}P \pm i\sqrt{x_0 + \gamma(P-1)}$$

$$\approx -\frac{\gamma}{2}P \pm i\, i\frac{\gamma P}{2} \pm \frac{1}{2} i\gamma(P-1)\cdot\frac{2}{\gamma P i}$$

$$= -\frac{\gamma}{2}P \mp \frac{\gamma P}{2} \pm \frac{P-1}{P} = \begin{cases} -\frac{P-1}{P} & = \lambda_2 \\ -\gamma P + \frac{P-1}{P} & = \lambda_1 \end{cases}$$

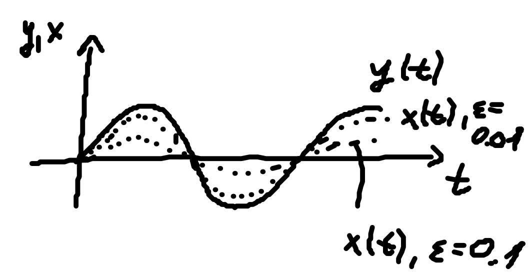
4.2.1. Einschub Störungstheorie

Bsp.: $\ddot{x} + \varepsilon\dot{x} + x = 0$

↓

kleiner Parameter also $\varepsilon\dot{x}$ kleine Störung

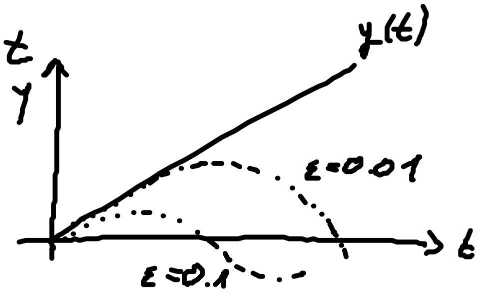
ungestörtes Problem: $\ddot{y} + y = 0 \quad \to \quad y(t) = \sin t$



$\implies$ $\boxed{\text{regulär gestörtes Problem}}$

Bsp.: $\ddot{x} + \varepsilon x = 0$

ungestörtes Problem $\ddot{y} = 0 \longrightarrow y(t) = t$



$\Rightarrow$ $\boxed{\text{singulär gestörtes Problem}}$

Def.: Ein Problem $P_\varepsilon(x_\varepsilon)$ heißt <u>regulär gestört</u>, wenn seine Lösung x_ε für $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig bezüglich t konvergiert.

Def.: Ein Problem heißt <u>singulär gestört</u>, wenn gleichmäßige Konvergenz $x(t,\varepsilon) \to y(t)$ für $\varepsilon \to 0$ verletzt ist.