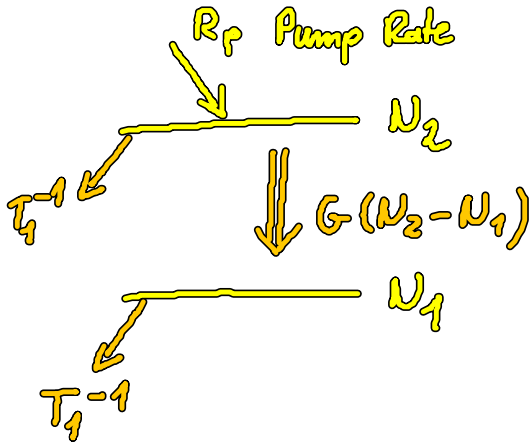


4. Nichtlineare Dynamik am Beispiel des Lasers

4.1. Laser Ratengleichungen

4.1.1. 2 Variablen System (phänomenologischer Ansatz)



Inversion $\bar{D} = (N_2 - N_1)$

Photonenzahl $\frac{dN_{ph}}{dt} = G \bar{D} N_{ph} - \frac{N_{ph}}{\tau_{ph}}$

Inversion: $\frac{d\bar{D}}{dt} = -\frac{1}{T_1} (\bar{D} - \bar{D}_0) - 2G \bar{D} N_{ph}$
 $\bar{D}_0 = R_p T_1$

Dimensionslose Formulierung

$$I = 2G T_1 N_{ph}$$

$$D = G \tau_{ph} \bar{D}$$

$$t = \frac{t'}{\tau_{ph}}$$

$$\dot{I} = I(D - 1)$$

$$\dot{D} = \gamma (P - D(1 + I))$$

τ_{ph} : Lebensdauer der Photonen im Laser

Zeitkennparameter

$$\gamma = \frac{\tau_{ph}}{T_1}$$

effektiver Pump Parameter

$$P = G \tau_p R_p T_1$$

Größenordnungen

Laser

CO₂
Festkörper
Halbleiter Lasers
HeNe

τ_{ph}

10⁻⁸
10⁻⁶
10⁻¹²

T_1

4 · 10⁻⁶
25 · 10⁻⁴
10⁻³

γ

25 · 10⁻³
4 · 10⁻³
10⁻³
> 1

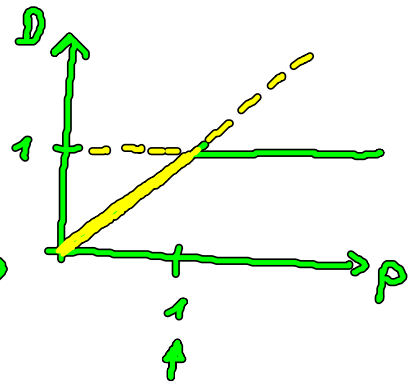
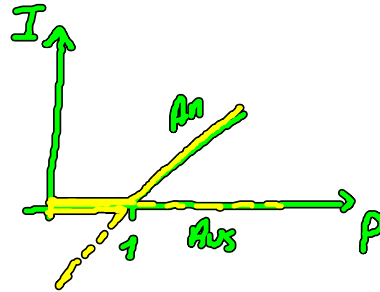
führt zu schlechter
Stabilitätseigenschaften

Fixpunkte

2 Lösungen

① $I = 0$ & $D = P$

② $I = P - 1$ & $D = 1$



Laserschwelle
transkritische Bifurkation

Stabilität

Jakobi Matrix

$$A = \begin{pmatrix} D-1 & I \\ -D\gamma & -(1+I)\gamma \end{pmatrix}$$

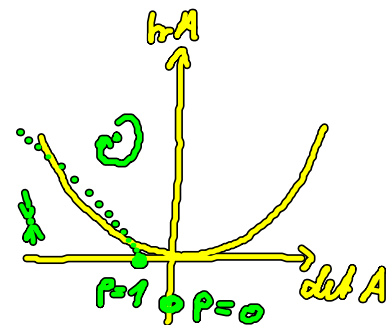
① $\lambda_1 = P - 1$

$\lambda_2 = -\gamma$

stabil für $P < 1$

$$\textcircled{2} \lambda^2 + \mu P \lambda + \mu(P-1) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{tr} A &= -\mu P < 0 && \text{für } P > 0 \\ \det A &= \mu(P-1) > 0 && \text{für } P > 1 \end{aligned}$$



$$\lambda_{1,2} = -\mu \frac{P}{2} \pm i \sqrt{\mu(P-1) - \frac{\mu^2 P^2}{4}}$$

wenn $> 0 \rightarrow$ Fixpunkt ist Fokus

Für kleine μ (P fest) Taylor um x_0

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\mu \frac{P}{2} \pm i \sqrt{\mu(P-1)} + \mathcal{O}(\mu^{3/2})$$

$$\uparrow \frac{1}{\sqrt{x_0}} \Delta x \sim \frac{1}{\sqrt{\mu}} \mu^2$$

$$\left[f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \frac{1}{2} \Delta x f'(x_0) \right]$$

\Rightarrow Lösung in der Nähe des Fixpunkts (μ klein)

$$\delta I = I - (P-1) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$= c e^{-\frac{\mu}{2} P t} \sin(\sqrt{\mu(P-1)} t + \phi)$$

↙
Dämpfungsrate
 $\pi = \mu \frac{P}{2}$

↘
Relaxations-
Oszillations-
Frequenz $\omega_2 = \sqrt{\mu(P-1)}$

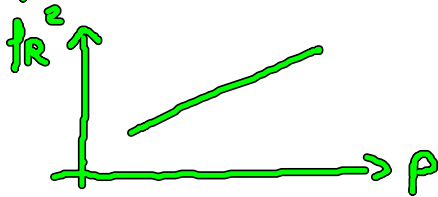
- Bem.
 - gedämpfte RO Oszillationen
 - schwach stabiler Fixpunkt

$$\omega_R^2 = 2\Gamma - \gamma$$



2 verschiedene Zeitzeilen
im System $t_1 = \sqrt{\gamma(P-1)} t$
 $t_2 = \gamma \frac{P}{2} t$

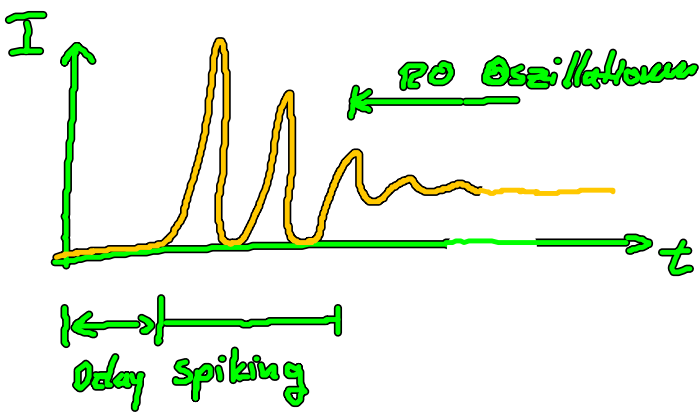
- Experiment



(Zeit mit Dimension $t_R = \sqrt{\frac{P-1}{T_1 Z_{ph}}}$

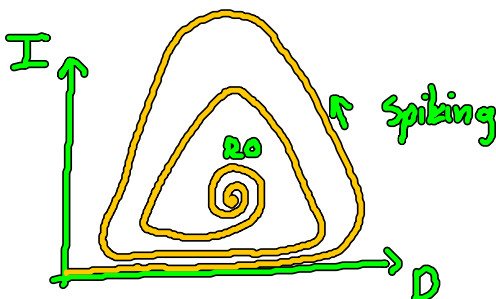
$$\Gamma_D = \frac{P}{2T_1})$$

- Einschwingvorgang (Messung)



Class B Laser
(γ klein)

- Phasenraum



$$D = \frac{\dot{I}}{I} + 1$$

(indirekte Messung
der Inversion)

4.1.2. Beschreibung des Lasers mit elektrischem Feld

\tilde{E} : komplexes Feld

(Herleitung aus Maxwell-Gleich. mit Eliminieren von P)

$$\dot{\tilde{E}} = \frac{1}{2} G \bar{D} \tilde{E} - \frac{\tilde{E}}{2\tau_{ph}}$$

$$\nu_{ph} \approx |\tilde{E}|^2$$

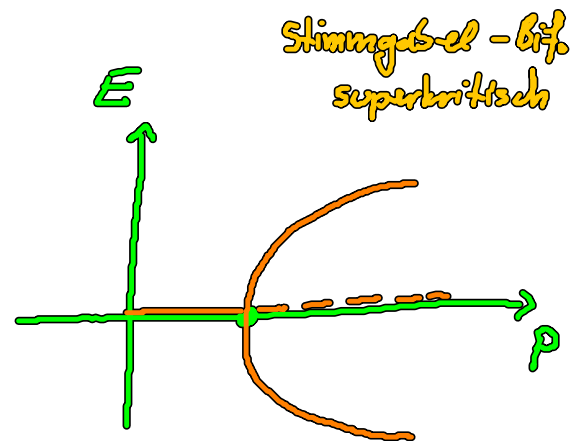
$$E = \sqrt{2G\tau_{ph}} \tilde{E} \quad (\text{dimensionslos})$$

I₁ $\dot{E} = \frac{1}{2} E (D - 1)$

I₂ $\dot{D} = \gamma (P - D(1 + E^2))$

Lösungen

① $E=0 \quad D=P$
 ② $E=\pm\sqrt{P-1} \quad D=1$



• Fall μ groß

- D ändert sich ganz schnell und ist wenn sich E ändert schon konstant
- D folgt sofort jeder Änderung von E

Verstärkungsprinzip P
(Haken)

adiabatisches Eliminieren

$$\Rightarrow \dot{D} = 0$$

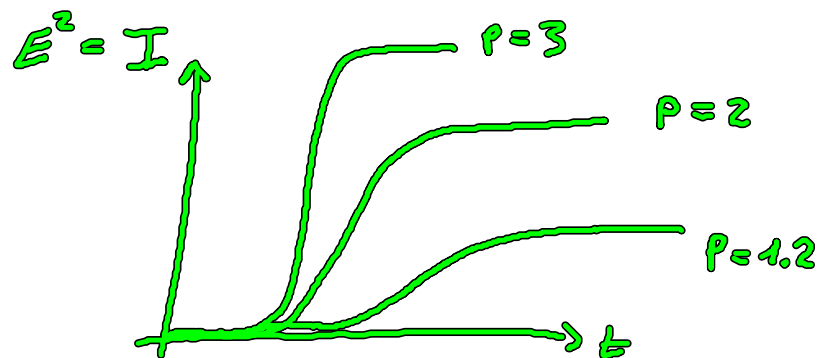
$$\text{II}_2: \dot{D} = 0 \quad D(1+E^2) = P \quad \rightarrow \quad D = \frac{P}{1+E^2} \quad (\text{statischer Zusammenhang})$$

Class A Laser

$$\text{II}_1: \dot{E} = \frac{1}{2} E \left(\frac{P}{1+E^2} - 1 \right)$$

$$A = -(P-1) < 0$$

→ Nur noch ein dynamischer Freiheitsgrad
mit Zeitkonstante $\tau = \frac{1}{P-1}$



• kritische Verlangsamung am
Bifurkationspunkt $P=1$
(μ groß)

4.2. Normalform der Laser Gleichung in der Nähe der Schwelle

- Suche einfache Amplitudengleichung für Laser bei $P \approx 1$
(für beliebiges μ)
- Idee: Störungstheorie mit Kletzeinansatz

Erinnerung: 2 Zeitbelegen im System $\lambda_1 = -\mu P + \frac{P-1}{P}$ ⑤

$$\lambda_2 = -\frac{P-1}{P}$$

$P \rightarrow 1 \rightarrow \lambda_2$ klein

Entwicklung für $P-1$ sehr klein

$$\textcircled{\oplus} \lambda_{1,2} = -\frac{\mu}{2} P \pm i \sqrt{\underbrace{\mu(P-1)}_{\Delta x} - \underbrace{\mu^2 \frac{P^2}{4}}_{x_0}}$$

$$= -\frac{\mu}{2} P \pm i \sqrt{x_0 + \mu(P-1)}$$

$$\approx -\frac{\mu}{2} P \pm i \left[\frac{\mu P}{2} \pm \frac{1}{2} i \mu(P-1) \right] \cdot \frac{2}{\mu P i}$$

$$= -\frac{\mu}{2} P \mp \frac{\mu P}{2} \pm \frac{P-1}{P} = \begin{cases} -\frac{P-1}{P} & = \lambda_2 \\ -\mu P + \frac{P-1}{P} & = \lambda_1 \end{cases}$$

4.2.1. Einschub Störungstheorie

Bsp.: $\ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + x = 0$

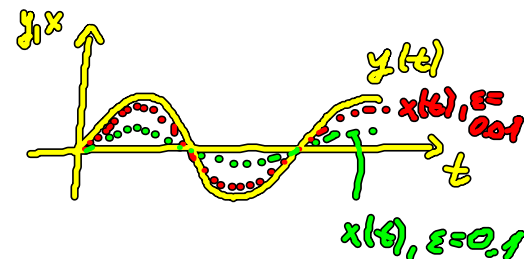


kleiner Parameter also $\varepsilon \dot{x}$ kleine Störung

ungestörtes Problem: $\ddot{y} + y = 0$

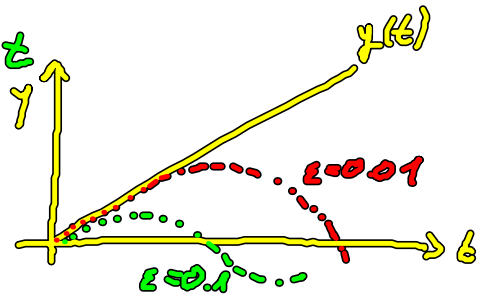
$\rightarrow y(t) = \sin t$

=> regulär gestörtes Problem



Bsp.: $\ddot{x} + \varepsilon x = 0$

ungestörtes Problem $\ddot{y} = 0 \rightarrow y(t) = t$



\Rightarrow singular gestörtes Problem

Def.: Ein Problem $P_\varepsilon(x_\varepsilon)$ heißt regulär gestört, wenn seine Lösung x_ε für $\varepsilon \rightarrow 0$ gleichmäßig beschränkt & konvergiert.

Def.: Ein Problem heißt singular gestört, wenn gleichmäßige Konvergenz $x(t, \varepsilon) \rightarrow y(t)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ verletzt ist.