4.2. Normalform der Laser gl. in der Nähe der Schwelle (Fortsetzung)

Ratengleichungen

$$\dot{E} = \frac{1}{2} E (D - 1)$$

$$\dot{D} = \gamma (P - D(1 + E^2))$$

Lebensdauer Photonen

$$\gamma = \frac{T_{ph}}{T_1}$$

Lebensdauer Elektronen

Schwelle : $P = 1$

Asymptotische Entwicklung

Def.: Die Summe $\sum_n^N f_n(\varepsilon)$ heißt asymptotische Entwicklung für $\varepsilon \to 0$, wenn

$$\frac{f(\varepsilon) - \sum^M f_n(\varepsilon)}{f_M(\varepsilon)} \to 0 \quad \text{für } \varepsilon \to 0$$

also: Die Abweichung ist kleiner als der letzte Term der Entwicklung.

$$\to f(\varepsilon) \sim \sum_n^N f_n(\varepsilon)$$

üblicherweise Entwicklung in Potenzreihen von ε

$$f(\varepsilon) \sim \sum_n^N a_n \varepsilon^n \quad ; \quad f(\varepsilon) \sim \sum^N a_n \delta_n(\varepsilon)$$

Satz: Die Entwicklung ist eindeutig für gegebenes $\delta_n(\varepsilon)$.

$$a_k = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon) - \sum^{k-1} a_n \delta_n(\varepsilon)}{\delta_k(\varepsilon)}$$

4.2.2. Vielzeitenansatz für Lasergleichung

Potenzreihen

$$E = \varepsilon E_1 + \varepsilon^2 E_2 + \dots$$

$$D = 1 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots$$

(ungestörtes Problem: $P = 1$ Lösung $E = 0$, $D = 1$)

kleiner Parameter

$$P - 1 = \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots$$

verschiedene Zeitskalen als unabhängige Variablen

$\tau_1 = \varepsilon t$ langsam

$\tau_2 = \varepsilon^2 t$ noch langsamer

$\tau_n = \varepsilon^n t$

$$\Rightarrow E(t) = E(\tau_1, \tau_2, \dots \tau_r)$$

$\rightarrow$ Kettenregel beim Zeitableiten

$$\frac{dE}{dt} = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial \tau_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial E}{\partial \tau_2} + \dots$$

$$\uparrow \frac{\partial \tau_1}{\partial t}$$

$$\left(\begin{aligned} \dot{E} &= \tfrac{1}{2} E(D-1) \\ \dot{D} &= \gamma(P - D(1+E^2)) \end{aligned} \right)$$

Einsetzen in II_1 und II_2 (rechte Seite)

$$\mathrm{II}_1: \dot{E} = \frac{1}{2}(\varepsilon E_1 + \varepsilon^2 E_2)(\varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2) + O(\varepsilon^4)$$

$$\mathrm{II}_2: \quad \dot D = \gamma\left(1+\varepsilon p_1+\varepsilon^2 p_2 - (1+\varepsilon D_1+\varepsilon^2 D_2+\varepsilon^3 D_3)(1+\varepsilon^2 E_1^2+2E_1E_2\varepsilon^3) + O(\varepsilon^4)\right)$$

linke Seite:

$$\dot E = \varepsilon \frac{\partial \varepsilon E_1}{\partial \tau_1} + \varepsilon \frac{\partial \varepsilon^2 E_2}{\partial \tau_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial \varepsilon E_1}{\partial \tau_2} + O(\varepsilon^4)$$

$$\dot D = \varepsilon \frac{\partial \varepsilon D_1}{\partial \tau_1} + \varepsilon^3 \left[\frac{\partial D_2}{\partial \tau_1} + \frac{\partial D_1}{\partial \tau_2} \right]$$

Sortieren nach Ordnungen von ε

Koeffizientenvergleich:

$O(\varepsilon)$: $$p_1 - D_1 = 0 \qquad (a)$$

$O(\varepsilon^2)$: $$\frac{\partial E_1}{\partial \tau_1} = \frac{1}{2} E_1 D_1 \qquad (b)$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial \tau_1} = \gamma\left(p_2 - D_2 - E_1^2\right) \qquad (c)$$

$O(\varepsilon^3)$: $$\frac{\partial E_2}{\partial \tau_1} + \frac{\partial E_1}{\partial \tau_2} = \frac{1}{2}\left(E_2 D_1 + E_1 D_2\right) \qquad (d)$$

Iteratives Lösen der Gleichungen (a) – (d)

$O(\varepsilon)$ $\quad D_1 = p_1 \xrightarrow{\text{Einsetzen in } O(\varepsilon^2)} \dfrac{\partial E_1}{\partial \tau_1} = \dfrac{1}{2} p_1 E_1$

$\longrightarrow E_1 = E_1(0)\, e^{\frac{1}{2} p_1 \tau_1}$

unbeschränkt oder Null für $p \neq 0$

↯ Annahme!

$\rightarrow p_1 = 0 = D_1$

$$\rightarrow \frac{\partial E_1}{\partial \tau_1} = 0$$

E_1 nicht von τ_1 abhängig

(c): $D_2 = p_2 - E_1^2$

$\rightarrow D_2$ auch nicht von τ_1 abhängig

(d): $$\frac{\partial E_2}{\partial \tau_1} = \underbrace{- \frac{\partial E_1}{\partial \tau_2} + \frac{1}{2} E_1 D_2}_{\text{nicht } \tau_1 \text{ abhängig}}$$

$\frac{\partial E_2}{\partial \tau_1} = \text{const} \rightarrow E_2$ unbeschränkt falls const $\neq 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial E_1}{\partial \tau_2} = \frac{1}{2} E_1 D_2 \overset{(c)}{=} \frac{1}{2} E_1 (p_2 - E_1^2)} \ (*)$$

$p - 1 = \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 \ldots$

DGL für $E_1(\tau_2)$

o.B.d.A: $|p_2| = 1$

$p_j = 0$ für $j \geq 3$

$\Rightarrow \varepsilon = \sqrt{p-1}$

Rücktransformation:

- Wir wissen: $D_1 = 0$; $p_1 = 0$; $\frac{\partial E_2}{\partial \tau_1} = \frac{\partial E_1}{\partial \tau_1} = 0$

$$\dot{E} = \varepsilon \cancel{\frac{\partial E_1}{\partial \tau_1}} + \varepsilon^3 \cancel{\frac{\partial E_2}{\partial \tau_1}} + \varepsilon^3 \frac{\partial E_1}{\partial \tau_2} + \ldots \Rightarrow \dot{E} = \varepsilon^3 \frac{\partial E_1}{\partial \tau_2}$$

$E = \varepsilon E_1 + \varepsilon^2 E_2 \;\rightarrow\; \varepsilon E_1 = E - O(\varepsilon^2)$

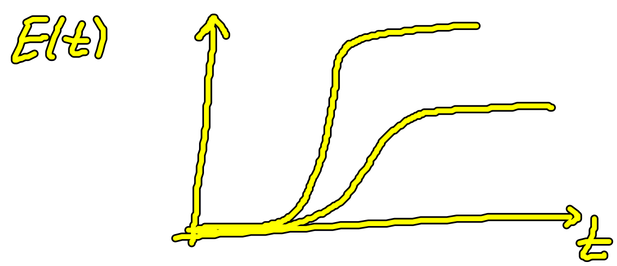
$D = 1 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2$

- Einsetzen in 5 $\;\Rightarrow\; \dot{E} = \underbrace{\varepsilon^3}_{\varepsilon \cdot \varepsilon^2}\left(\frac{1}{2} E_1 \left(1 - E_1^2\right)\right)$

$$\boxed{\dot{E} = \frac{1}{2} E \Big(\underbrace{\varepsilon^2}_{(p-1)} - E^2\Big)} + O(\varepsilon^3)$$

Normalform der Laserbifurkation an der Schwelle

ergibt Lösung <u>nicht</u> nur in der Nähe des Fixpunktes



- wieder kritische Verlangsamung (wie im Fall μ groß)

$\tau_2 = \varepsilon^2 t = (p-1)t$

4.2.3. Gültigkeitsgrenzen der Amplitudengl.

Beim Ansatz der Vielzeitenasymptotik wurde die

Zeitskala $\gamma P = \lambda_1$ ignoriert. Das ist ok wenn γP nur schnellen Exp. Abfall liefert. Problem wenn γP auch klein !

$$\left[\begin{aligned} \lambda_1 &= -\gamma P + \frac{P-1}{P} \\ \lambda_2 &= -\frac{P-1}{P} \end{aligned}\right]$$

Nur gültig für $|P-1| << \gamma$

für $\gamma = 10^{-3}$ läßt dies einen sehr kleinen Gültigkeitsbereich.

Grenzfall $\gamma \to 0$ $\begin{cases} \text{Lineare Stabilitätsanalyse für festes } P \\ \text{(nahe am Fixpunkt)} \qquad 4.1.1. \to \text{RO Oszillation} \\ |P-1| << \gamma \quad \to \text{Amplitudengleichung} \\ P \text{ fest } + \text{ weit weg vom Fixpunkt } ? \end{cases}$

4.3. Nichtlineare Stabilitätsanalyse im Fall $\gamma \to 0$

Idee: Wieder störungstheoretischer Ansatz aber diesmal ist kleiner Parameter $\sim \gamma$

Lösung soll für $\gamma \to 0$ gut sein.

Problem: ungestörte Gleichungen $(\gamma = 0)$

$$\dot{I} = I\,(D(0) - 1)$$

$$I(t) = I(0)\, e^{(D(0)-1)\,t}$$

$$\dot{D} = \gamma(P - D(1+E^2))$$

$$\dot{D} = 0$$

$$D(t) = D(0)$$

d.h. im Fall $\gamma = 0$ ergibt sich $I \to 0$ oder $I \to \infty$

was beides unphysikalisch ist!

$\Rightarrow$ $\gamma \to 0$ ist ein singulärer Grenzfall

Lösung : Reskalieren damit γ nicht mehr die rechte Seite multipliziert

Bedingung : wenige Parameter
γ nicht vor rechter Seite

Ansatz: Zeit $s = \sigma t$

Intensität $I = P - 1 + \alpha y$

Inversion $D = 1 + \beta x$

x, y sind neue dynamische Größen die Abweichung vom Fixpunkt beschreiben (x, y nicht klein)

gesucht : σ, α, β

Einsetzen in Lasergleichungen (I)

$$I_1 : \frac{\alpha}{\sigma} y' = (P-1+\alpha y)\beta x = x\left(\frac{\sigma\beta}{\alpha}(P-1) + \sigma\beta y\right)$$

$$I_2 : \frac{\beta}{\sigma} x' = \gamma\left(P - (1+\beta x)(P+\alpha y)\right)$$

Bed. X_1

$\sigma/\beta = 1$

$\frac{\sigma\beta}{\alpha}(P-1) = 1$

Bed X_1

$$x' = -\sigma\gamma_1 P x - \underbrace{\sigma^2\gamma_1(P-1)}_{\gamma_1\sigma^2(P-1)=1} y - \sigma\gamma_1(P-1)xy$$

$\sigma^2 = \frac{1}{\gamma_1(P-1)} = \frac{1}{\omega_R^2}$

RO Frequenz!

$$= -y - \gamma_1\sigma x\left(P-(P-1)y\right)$$

$$= -y - \underbrace{\frac{\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{P-1}}}_{\varepsilon^2 = \sqrt{\frac{\gamma_1}{P-1}} \ll 1} x\left(P-(P-1)y\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{y} &= (1+y)x \\ \dot{x} &= -y - \varepsilon^2 x\left(P-(P-1)y\right) \end{aligned}}$$

Nun: Grenzfall $\mu \to 0$ führt nicht mehr zu singulärem Problem
<u>sondern</u> zum konservativen ungestörten Problem

▶ <u>Def. konservativ:</u> Das System $\underline{F}(\underline{x}) = \dot{\underline{x}}$ heißt konservativ, wenn es eine Funktion C, so dass gilt $\underline{F}\,\nabla_{\underline{x}} C = 0$.