

Asymptotische Lösung der Lasergleichung

(Spiking beim
Class B Laser)

Reskalieren der Lasergl. führt auf

neue Zeit $S = \omega_R t$

Intensität $I = (P-1)(1+y)$

Inversion $D = 1 + \omega_R X$

$$y = \frac{z_{ph}}{T_1}$$

→

$$\dot{y} = (1+y)x$$

$$\dot{x} = -y - \sqrt{\frac{y}{P-1}} x (P - (P-1)y)$$

nach exakt

Zeitskalparameter

4.3.2. Ungestörtes Problem ($y=0$)

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = (1+y)x \end{cases}$$

System ist konservativ. Erhaltungsgröße

$$C = \frac{x^2}{2} + y - \ln(1+y)$$

(Bed.: $F(x) = \dot{x}$ ist konservativ wenn C ex. so dass)

$$F \cdot \nabla C = 0$$

$$\nabla C = \begin{pmatrix} 2x \\ 1 - \frac{1}{1+y} \end{pmatrix}$$

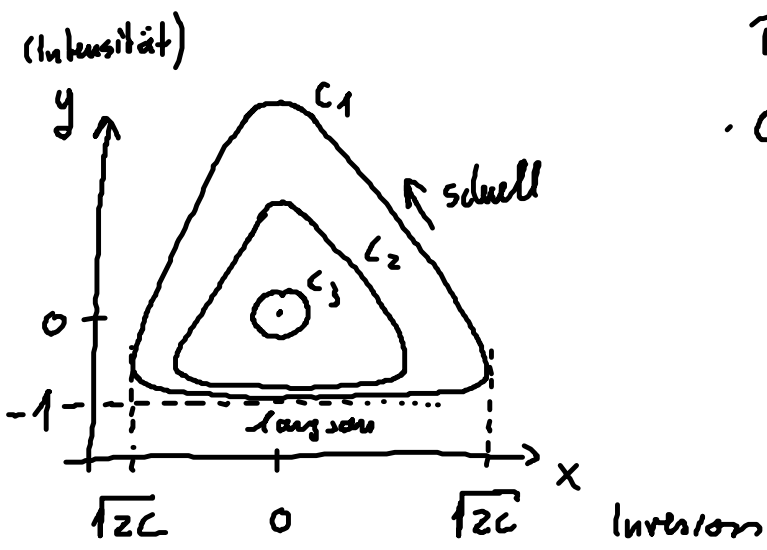
$$F(x) = \begin{pmatrix} -y \\ (1+y)x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla C \cdot F = 0$$

$$x(y) = \pm \sqrt{2(C - y + \ln(1+y))}$$

d.h. zu jedem C gibt es eine Trajektorie im Phasenraum

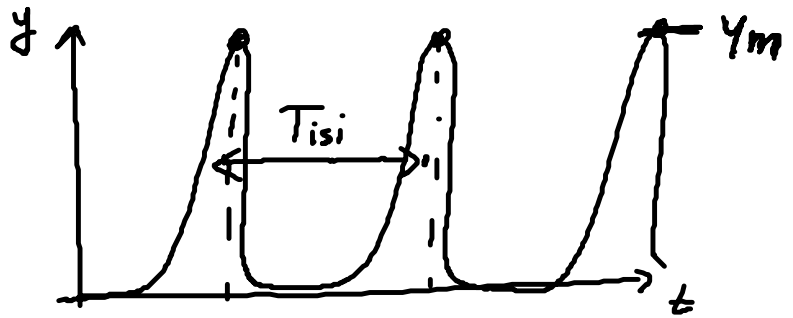
$\cdot C$ durch AB gegeben

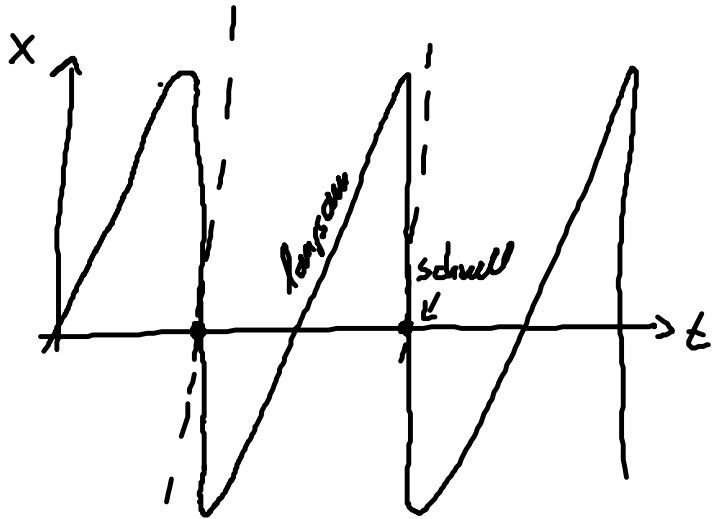


Lösungen für große C ergeben sich nichtlineare Schwingungen

$$y = -1 \Rightarrow I = 0$$

Zeitentwicklung? zunächst numerisch





- Interspike Intervall T_{isi}

\approx Zeit während $y = -1$

$$\text{DGL: } \dot{x} = 1$$

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx = \int_t^{t+T_{isi}} ds$$

$$2\sqrt{2}c = T_{isi}$$

Periode der Pulse hängt ab von c also von AB .

- Maximale Intensität von y
 y max. wenn $x = 0$
 $y_m = c$

\Rightarrow Periode und Intensität sind korreliert

$$y_m = \frac{T_{isi}^2}{8}$$

Man kann messen!

Zeitentwicklung analytisch!

$$\dot{y} = (1+y)x$$

$$\dot{x} = -y$$

→

$$\ddot{x} = \ddot{x} + x - \dot{x}x$$

Oszillator mit
nichtlinearer Reibung

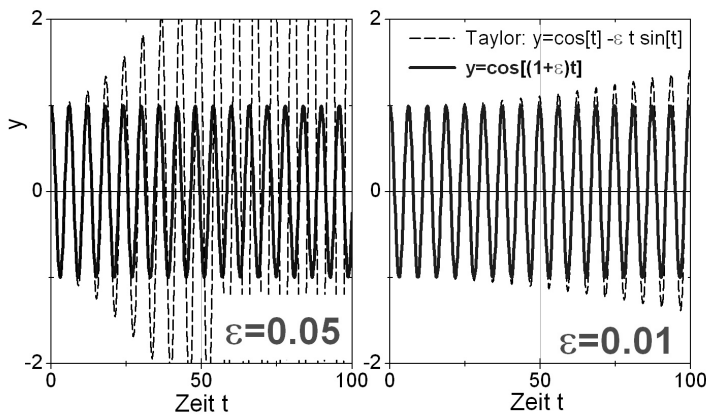
- Ansatz wieder über Potenzreihe

Problem: Bsp. $\cos(1 + \epsilon)t \stackrel{\text{Taylor}}{=} \cos t - \epsilon t \sin t + O(\epsilon^2)$

↗
variabler Periode

ist nur gut für
 $t \ll \frac{1}{\epsilon}$

Asymptotik bei variabler Frequenz periodischer Lösungen



d.h. periodische Lösungen
schwierig mit
Potenzreihenansatz zu
beschreiben

Lösung: Poincaré - Lindstedt Methode

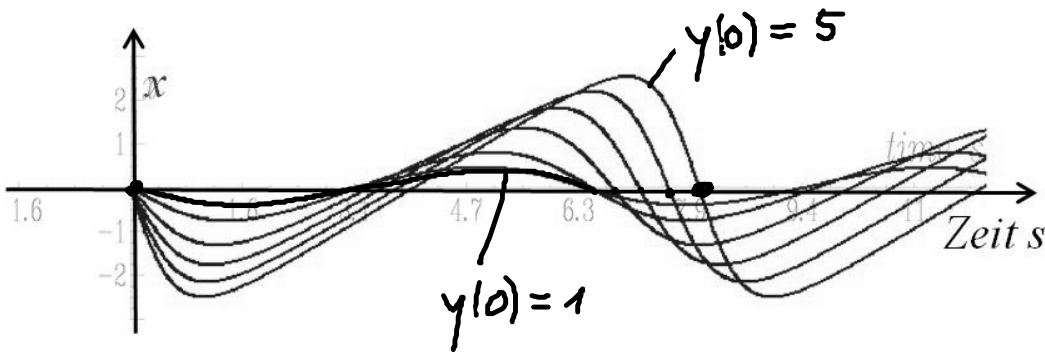
- Einführen einer gestreckten Zeit $\tau = \omega(\epsilon)t$

(nicht mehrere Zeitskalen wie in 4.2.2. über
störungsabhängige Zeit)

→ Periode der Lösung in τ nicht
 ϵ abhängig (im Gegensatz zur
Periode in t)

$$\rightarrow y = y(\tilde{t}, \varepsilon)$$

• Ansatz für Lösung von (III) (Laser bei $\gamma=0$)



Periode skaliert mit Amplitude der Lösung

$$0 = \ddot{x} + x - \dot{x}$$

$$x = x(0) e^{is} \quad \text{klein wenn } x_0(0) \text{ klein}$$

$$\tilde{t} = (1 + \alpha A^2) s$$

$$x(\tilde{t}) = A x_0(\tilde{t}) + A^2 x_1(\tilde{t}) + O(A^3)$$

$$y(\tilde{t}) = A y_0(\tilde{t}) + A^2 y_1(\tilde{t}) + O(A^3)$$

A Amplitude

α noch zu bestimmen

Für $A^2 \rightarrow 0$ ist Lösung harmonische Schwingung

Einsetzen in III

$$(1 + \alpha A^2) (A \dot{y}_0 + A^2 \dot{y}_1) = [1 + (A y_0 + A^2 y_1)] (A x_0 + A^2 x_1)$$

$$(1 + \alpha A^2) (A \dot{x}_0 + A^2 \dot{x}_1) = - (A y_0 + A^2 y_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} = (1 + \alpha A^2) \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$$

Sortieren nach Ordnungen von A

$$\Leftrightarrow A(x_0 - y_0) + A^2(x_0 y_0 + x_1 - y_1) + O(A^3) = 0$$

$$\underbrace{A(\dot{x}_0 + y_0)}_{O(A)} + \underbrace{A^2(\dot{x}_1 + y_1)}_{O(A^2)} + O(A^3) = 0$$

$$O(A): \quad \begin{aligned} y_0 &= e^{i\tau} + cc \\ x_0 &= ie^{i\tau} + cc \end{aligned} \quad \ddot{y}_0 + y_0 = 0$$

$$O(A^2): \quad \begin{aligned} x_0 y_0 + x_1 - y_1 &= 0 \\ \dot{x}_1 + y_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$-ie^{2i\tau} = \dot{x}_1 + x_1$$

\Leftrightarrow

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}ie^{2i\tau} + cc$$

$$y_1 = -\frac{2}{3}e^{i2\tau} + cc$$

noch keine Bedingung für α

$$\Rightarrow O(A^3): \quad \begin{aligned} \dot{y}_2 + \alpha \dot{y}_0 &= (y_1 x_0 + x_1 y_0) + y_2 \\ \dot{x}_2 + \alpha \dot{x}_0 &= -y_2 \end{aligned}$$

\Leftrightarrow mit bekannten x_1, x_0

$$\ddot{x}_2 + x_2 = \boxed{2i\alpha e^{i\tau} + \frac{1}{3}ie^{3i\tau}}$$

\dagger

Bedingung an die Lösung:
Lösung muss periodisch sein!

Einschub:

Satz: Wenn $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte periodische Funktion ist, wobei T die Periode ist, und die

DGL $\ddot{y} + y = f$ gegeben ist, dann gibt es eine periodische Lösung falls:

$$\int f(t) \cos t \, dt = 0, \quad \int f(t) \sin t \, dt = 0$$

Beweis: Sei das innere Produkt $\langle y, z \rangle = \int_T y(t) z(t) \, dt$

und DGL $Ay = f$ mit $A = \frac{d^2}{dt^2} + 1$

$$\langle y, Az \rangle = \int \underline{y} (z'' + z) \, dt \quad \underline{z} \times \text{ partielle Integration}$$

$$= \int (y'' + y) z \, dt$$

$$= \langle Ay, z \rangle \quad \rightarrow A \text{ ist selbstadjungiert}$$

wenn $Ay = f$ und $Az = 0$
(homogene Lösung z)

$$\langle f, z \rangle = \langle Ay, z \rangle = \langle y, \underbrace{Az}_0 \rangle = 0 \quad \square$$

Anwendung der Lösbarkeitsbedingung auf $O(A^3)$

$$\rightarrow \alpha = -\frac{1}{6}$$

\Rightarrow Lösung von III

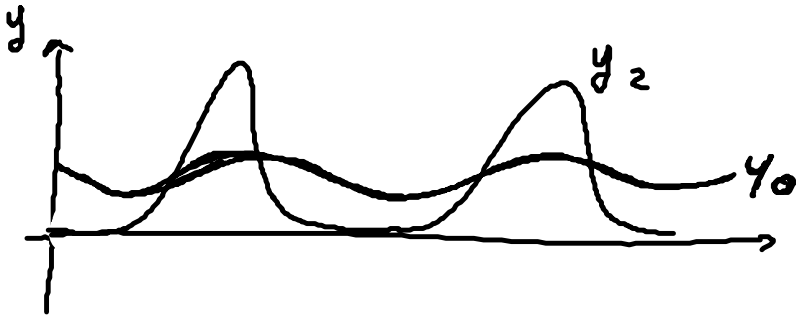
$$\tau = \left(1 - \frac{1}{6} A^2\right) s$$

$$x(\tau) = i A e^{i\tau} + \frac{1}{3} A^2 e^{2i\tau} + cc + O(A^3)$$

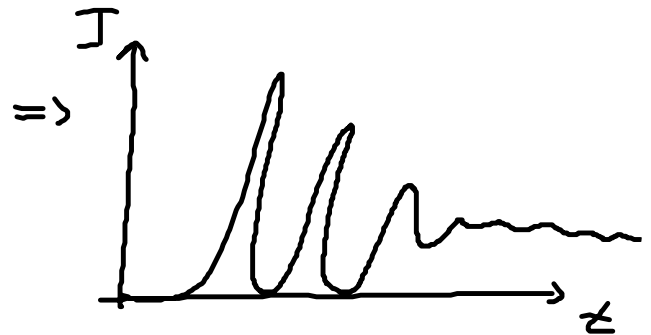
$$y(\tau) = A e^{i\tau} - A^2 \frac{2}{3} e^{2i\tau} + cc + O(A^3)$$

- je mehr Ordnungen mitgenommen werden desto anharmonischer ist die resultierende Schwingung

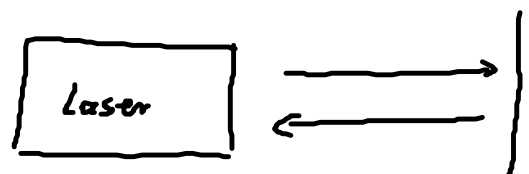
• Lösung gültig für alle τ



- Für die volle Dynamik des Lasers mit Dämpfung ($\gamma \neq 0$) muss dann die nächste Ordnung in τ mitgenommen werden.



4.4. Laser mit opt. Rückkopplung



4.4.1. Halbleit Laser - Linienverbreiternder Faktor

Spiegel