Asymptotische Lösung der Laserglichung

(Spiking beim Class B Laser)

Reskalieren der Lasergl. führt auf

neue Zeit $s = \omega_R t$

Intensität $I = (P-1)(1+y)$

Inversion $D = 1 + \omega_R x$

$\gamma = \frac{\tau_{ph}}{T_1}$

Zeitskalenparameter

$\rightarrow$

$$\dot{y} = (1+y)x$$

$$\dot{x} = -y - \sqrt{\frac{\gamma}{P-1}}\, x \left(P - (P-1)y \right)$$

noch exakt

4.3.2. Ungestörtes Problem ($\gamma = 0$)

$$\boxed{\text{III}} \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= (1+y)x \end{aligned}$$

System ist konservativ. Erhaltungsgröße

$$C = \frac{x^2}{2} + y - \ln(1+y)$$

(Bed.: $F(x) = \dot{x}$ ist konservativ wenn C ex. so dass
$$F \cdot \nabla C = 0$$
)

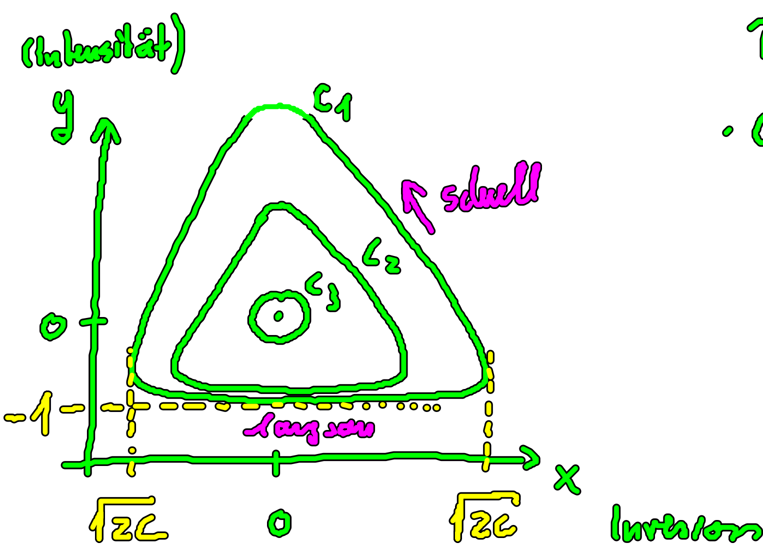
$$\nabla C = \begin{pmatrix} 2x \\ 1 - \frac{1}{1+y} \end{pmatrix}$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} -y \\ (1+y)x \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \nabla C F = 0$$

$$x(y) = \pm\sqrt{2(C - y + \ln(1+y))}$$

d.h. zu jedem C gibt es eine Trajektorie im Phasenraum

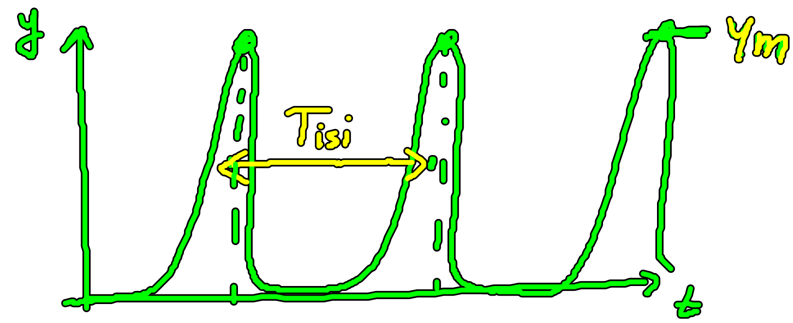
- C durch AB gegeben

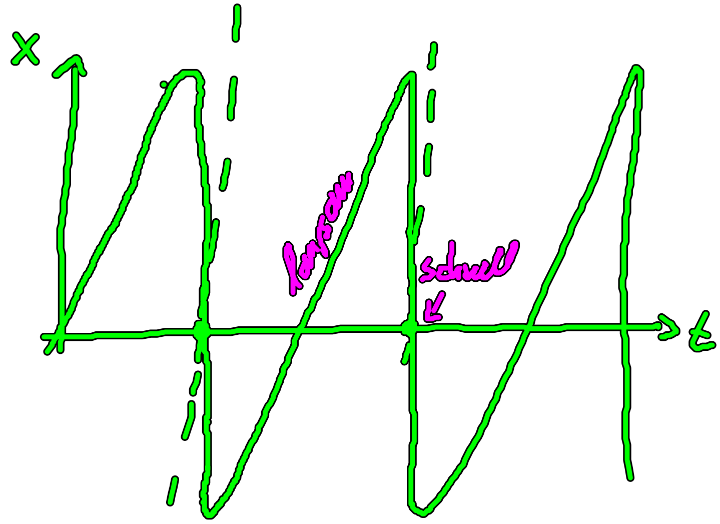


Lösungen für große C ergeben sich nichtlineare Schwingungen

$y = -1 \Rightarrow I = 0$

Zeitentwicklung? zunächst numerisch





- Interspike Intervall T_{isi}

≈ Zeit während $y = -1$

DGL: $\dot{x} = 1$

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} dx = \int_{t}^{t+T_{isi}} ds$$

$$2\sqrt{2c} = T_{isi}$$

Periode der Pulse hängt ab von c also von AB.

- Maximale Intensität von y

y max. wenn $x = 0$
$y_m = c$

⇒ Periode und Intensität sind korreliert

$$y_m = \frac{T_{isi}^2}{8}$$

kann man messen!

Zeitentwicklung analytisch!

$\dot{y} = (1+y)x$

$\dot{x} = -y$

$\longrightarrow \quad 0 = \ddot{x} + x - \dot{x}x$

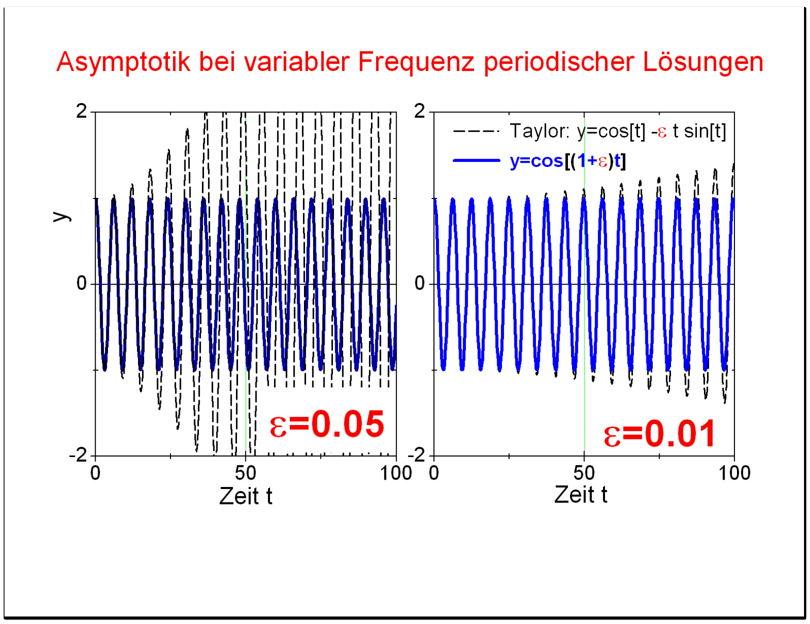
Oszillator mit nichtlinearer Reibung

- Ansatz wieder über Potenzreihe

Problem: <u>Bsp.</u> $\cos((1+\varepsilon)t) \overset{\text{Taylor}}{=} \cos t - \varepsilon t \sin t + O(\varepsilon^2)$

variabler Periode

ist nur gut für $t \ll \frac{1}{\varepsilon}$



d.h. periodische Lösungen schwierig mit Potenzreihenansatz zu beschreiben

<u>Lösung</u>: Poincaré – Lindstedt Methode

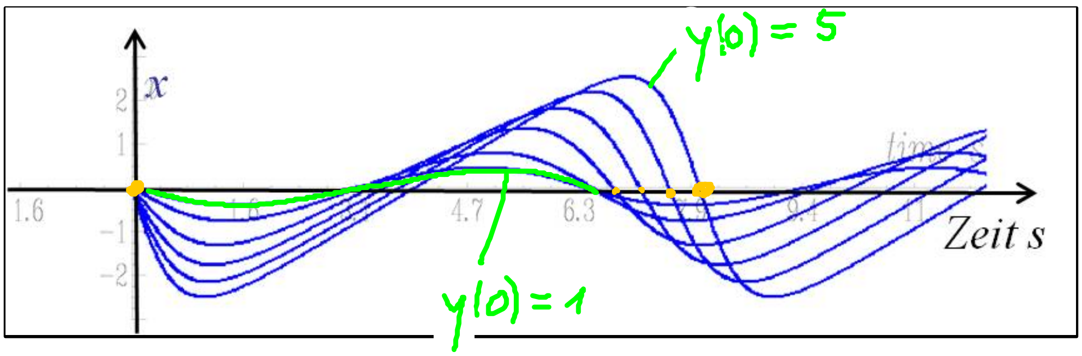
- Einführen einer gestreckten Zeit $\tau = \omega(\varepsilon)t$

(nicht mehrere Zeitskalen wie in 4.2.2. aber störungsabhängige Zeit)

$\longrightarrow$ Periode der Lösung in τ nicht ε abhängig (im Gegensatz zur Periode in t)

$\rightarrow y = y(\tau, \varepsilon)$

• Ansatz für Lösung von (III) (lasse bei $y=0$)



Periode skaliert mit Amplitude der Lösung

$0 = \ddot{x} + x - \cancel{\dot{x} y}$

$x = x(0) e^{is}$ klein wenn $x_0(0)$ klein

$$\boxed{\begin{aligned} \tau &= (1 + \alpha A^2)\, s \\ x(\tau) &= A x_0(\tau) + A^2 x_1(\tau) + O(A^3) \\ y(\tau) &= A y_0(\tau) + A^2 y_1(\tau) + O(A^3) \end{aligned}}$$

A Amplitude

α noch zu bestimmen

Für $A^2 \to 0$ ist Lösung harmonische Schwingung

Einsetzen in III

$$\frac{\partial}{\partial s} = (1 + \alpha A^2) \frac{\partial}{\partial \tau}$$

$$(1 + \alpha A^2)(A \dot{y}_0 + A^2 \dot{y}_1) = [1 + (A y_0 + A^2 y_1)](A x_0 + A^2 x_1)$$

$$(1 + \alpha A^2)(A \dot{x}_0 + A^2 \dot{x}_1) = -(A y_0 + A^2 y_1)$$

Sortieren nach Ordnungen von A

$$\Leftrightarrow \quad A(x_0 - \dot{y}_0) + A^2(x_0 y_0 + x_1 - \dot{y}_1) + O(A^3) = 0$$

$$\underbrace{A(\dot{x}_0 + y_0)}_{O(A)} + \underbrace{A^2(\dot{x}_1 + y_1)}_{O(A^2)} + O(A^3) = 0$$

$O(A)$: $\quad y_0 = e^{i\tau} + cc \qquad \ddot{y}_0 + y_0 = 0$

$\quad x_0 = i e^{i\tau} + cc$

$O(A^2)$: $\quad x_0 y_0 + x_1 - \dot{y}_1 = 0 \qquad -ie^{2i\tau} = \ddot{x}_1 + x_1$

$\quad \dot{x}_1 + y_1 = 0 \qquad \Leftrightarrow$

$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{3} i e^{2i\tau} + cc$

$\quad y_1 = -\frac{2}{3} e^{i2\tau} + cc$

noch keine Bedingung für α

$\Rightarrow O(A^3)$: $\quad \dot{y}_2 + \alpha \dot{y}_0 = (y_1 x_0 + x_1 y_0) + y_2$

$\quad \dot{x}_2 + \alpha \dot{x}_0 = -y_2$

$\Leftrightarrow$ mit bekannten x_1, x_0

$$\ddot{x}_2 + x_2 = \underbrace{\boxed{2i\alpha e^{i\tau} + \frac{1}{3} i e^{3i\tau}}}_{f}$$

Bedingung an die Lösung:
Lösung muss periodisch sein!

Einschub:

Satz: Wenn $f: T \to \mathbb{R}$ eine glatte periodische Funktion ist, wobei T die Periode ist, und die

DGL $\ddot{y} + y = f$ gegeben ist, dann gibt es eine periodische Lösung falls:

$$\int f(t) \cos t \, dt = 0 \quad , \quad \int f(t) \sin t \, dt = 0$$

Beweis: Sei das innere Produkt $\langle y, z \rangle = \int_T y(t) z(t) dt$

und DGL $Ay = f$ mit $A = \frac{d^2}{dt^2} + 1$

$$\langle y, Az \rangle = \int y \, (z'' + z) dt$$

2x partielle Integration

$$= \int (y'' + y) z \, dt$$

$$= \langle Ay, z \rangle$$

$\rightarrow$ A ist selbstadjungiert

wenn $Ay = f$ und $Az = 0$ (homogene Lösung z)

$$\langle f, z \rangle = \langle Ay, z \rangle = \langle y, \underbrace{Az}_{0} \rangle = 0$$

☒

Anwendung der Lösbarkeitsbedingung auf $O(A^3)$

$\rightarrow \alpha = -\frac{1}{6}$

$\Rightarrow$ Lösung von $\overline{\underline{III}}$

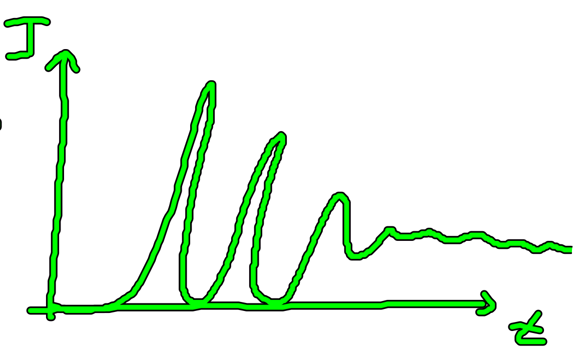
$$\tau = \left(1 - \frac{1}{6}A^2\right) s$$

$$x(\tau) = iAe^{i\tau} + \frac{1}{3}A^2 e^{2\tau i} + cc + O(A^3)$$

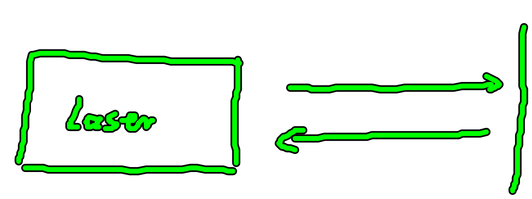
$$y(\tau) = Ae^{i\tau} - A^2 \frac{2}{3} e^{2i\tilde{\tau}} + cc + O(A^3)$$

- je mehr Ordnungen mitgenommen werden desto anharmonischer ist die resultierende Schwingung
- Lösung gültig für alle τ

- Für die volle Dynamik des Lasers mit Dämpfung ($\gamma \neq 0$) muss dann die nächste Ordnung in $\sqrt{\gamma}$ mitgenommen werden.

$\Rightarrow$ 

4.4. Laser mit opt. Rückkopplung



4.4.1. Halbleiterlaser – Linienverbreiternder Faktor