

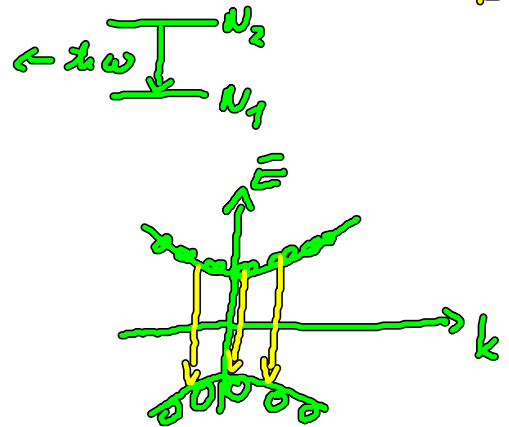
4.4. Laser mit optischer Rückkopplung

4.4.1. Halbleiterlaser

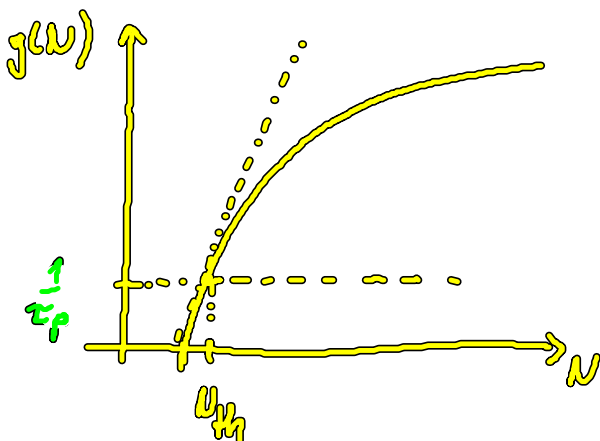
Bisher: $\vec{E} = \frac{1}{2} \underbrace{\epsilon \vec{D}}_{\text{Gain } g} \vec{E} - \frac{\vec{E}}{2\tau_p}$

- Rategleichung für 2Niveausystem mit feste Übergangsfrequenz führt auf linearen Gain
- $g \sim \underbrace{\epsilon (N_2 - N_1)}_B$

Jetzt: Für Halbleiterlaser müssen Bänder betrachtet werden



- Laser-Frequenz ω kann mit Ladungsträgerdichte n
- Verstärkung (Gain) hängt nichtlinear von n ab



Zahl der Ladungsträger im Leitungsband

Linearisierung von $g(N)$ um N_H liefert

linearem Term $g(N) \approx \frac{1}{\tau_p} + G_N (N - N_H)$

=> Feldgleichung -

$$\dot{\tilde{E}} = \underbrace{\frac{1}{2} G_N (N - N_H) \tilde{E}}_{g(N) \tilde{E}} + \frac{1}{2\tau_p} \tilde{E} - \frac{1}{2\tau_p} \tilde{E} - i(\omega(N) - \omega_H) \tilde{E}$$

Ladungsträger

$$\dot{N} = \tilde{J} - \frac{N}{T_1} - G_N (N - N_H) \tilde{E}^2 - \frac{1}{\tau_p} \tilde{E}^2$$

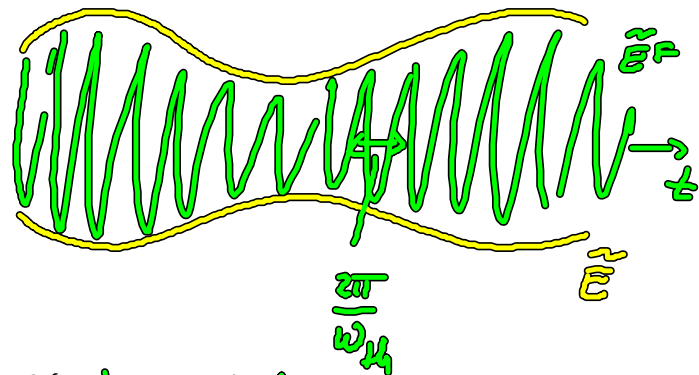
↑

Pumpstrom

Bemerkung:

\tilde{E} ist die langsame Amplitude des vollen Feldes \tilde{E}^F

$$\tilde{E}^F = \underbrace{\sqrt{I}}_{\tilde{E}} e^{i(\omega_N - \omega_H)t} e^{i\omega_H t}$$



- Annahme : Die Lasertfrequenz $\omega(N)$ ändert sich ebenfalls linear an der Schwelle mit N
 $\rightarrow \omega(N) = \omega_H + \omega_N (N - N_H)$

Einfügen von α in die Feldgleichung

Neue Variablen: $\tilde{n} = n - n_{th}$

$$J_{th} = \frac{N_{th}}{T_1}$$

$$\Rightarrow \dot{\tilde{E}} = \frac{G_N}{2} (1 + i\alpha) n \tilde{E}$$

$$\dot{\tilde{n}} = J - J_{th} - \frac{\tilde{n}}{T_1} - \left(G_N \tilde{n} + \frac{1}{\tau_p} \right) \tilde{E}^2$$

Dimensionslos: $t = t_{act} / \tau_p$

$$E = \sqrt{\frac{T_1 G_N}{2}} \tilde{E}$$

$$n = \frac{G_N \tau_p}{2} \tilde{n}$$

$$\dot{\tilde{E}} = (1 + i\alpha) n \tilde{E}$$

$$T \dot{\tilde{n}} = P_N - \tilde{n} - (1 + 2\tilde{n}) \tilde{E}^2$$

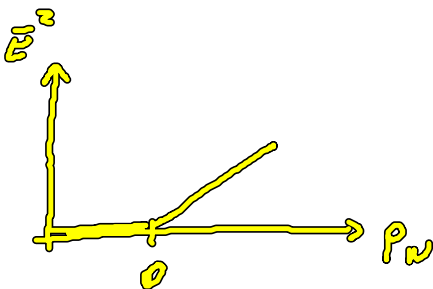
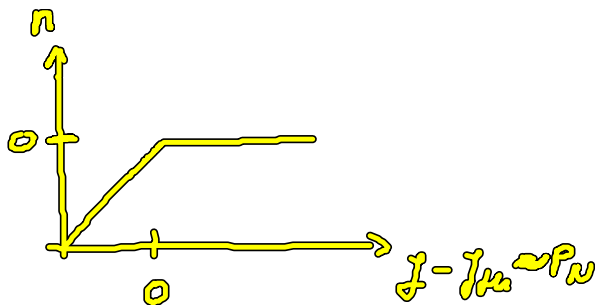
III

$$T = \frac{1}{\gamma} = \frac{T_1}{\tau_p}$$

Zählratenparameter

$$P_N = \frac{\tau_p T_1 G_N}{2} (J - J_{th})$$

Fixpunkte



Schwelle bei $P_N = 0$

(Bem: $D = 1 + 2\eta$
 $I = 2E^2$
 $P = 1 + 2P_u$ *Stetwert*
 Gleichungen für Zbiraw System)

Frequenz der Relaxationsoszillation (RO):

$$\omega_{RO} = \sqrt{2\gamma P_u}$$

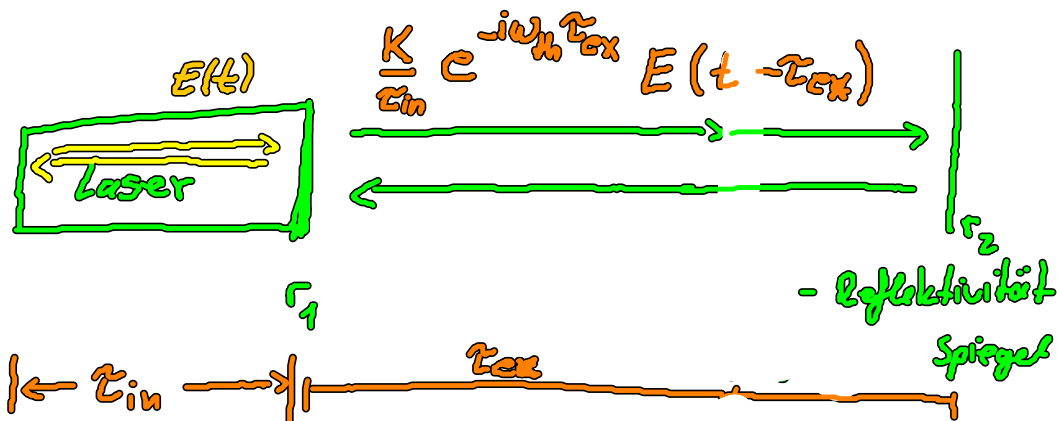
Dämpfung

$$\Gamma_{RO} = \frac{1 + 2P_u}{2T}$$

• In Lasergleichungen III spielt α -Faktor für Lösung keine große Rolle, da α -Faktor nur an die Phase von E koppelt $E = \sqrt{I} e^{i\phi}$

• Andere Situation mit optischer Rückkopplung
 Laserkopplung, optischer Injektion oder
 Laserpulsen

4.4.2. Optische Rückkopplung - Fixpunkt



• wenn nur ein Kanal in Extrem-Kavität betrachtet wird
kommt also zusätzlich die Feldamplitude

$$\frac{K}{\tau_{in}} e^{-i\omega_n \tau_{ex}} E(t - \tau_{ex}) \quad \text{dazu.}$$

K : Kopplungsstärke

$$K = \frac{(1 - r_1^2) r_2}{r_1}$$

• dimensionslose Größen

$$k = \frac{\tau_p}{\tau_{in}} K$$

$$\tau = \frac{\tau_{ex}}{\tau_p}$$

$$c = \omega_n \tau_{ex}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{E} = (1 + id) n E + k e^{-i c} E(t - \tau) \\ T \dot{n} = P_{in} - n - (1 + 2n) E^2 \end{cases}$$

Lang-Kobayashi
Modell

LK-Gleichungen

Experiment: Laser zeigt bei kleinsten rückgekoppelten Intensitäten
schon chaotisches Verhalten

→ Stabilitätsanalyse nötig

zunächst Fixpunkte

S^1 -Symmetrie der ZK-Gleichung:

Transformation $E \rightarrow cE$ mit $c \in \mathbb{C}$ mit $|c|=1$ lässt Gleichungen invariant.

=> Ansatz für Fixpunkte (Index c)

$$E = \sqrt{I_c} e^{i(\Omega - \Omega_0)t}$$

$$n = n_c$$

- stabile Intensität aber lineare Phase
- konstante Ladungsträgerzahl n_c

• Lösungen sind also stabile Moden im externen Resonator (external cavity modes) ECM

Modenfrequenz Ω der ECM

$$\begin{aligned} \rightarrow \Omega &= \omega \tau_p \\ \Omega_0 &= \omega_n \tau_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \Omega_0 \tau \\ &= \omega_n \tau_{ex} \end{aligned}$$

Einsetzen in ZK-Gleichung:

$$\text{(II)} \quad \sqrt{I_c} i(\Omega - \Omega_0) = (1 + id)n_c \sqrt{I_c} + k e^{-i\Omega_0 \tau} \sqrt{I_c} e^{-i(\Omega - \Omega_0)\tau} \quad (\cos + i \sin)$$

$$\text{(III)} \quad n_c = P_u - (1 + 2id) I_c$$

Suche Ω , die Gleichung erfüllen.

Teilen in Real + Imaginärteil

$$\text{Re I: } n_c \sqrt{I_c} + k \sqrt{I_c} \cos(\Omega \tau) = 0 \quad \rightarrow n_c = -k \cos \Omega \tau$$

$$\text{Im I: } \Omega - \Omega_0 = -\alpha n_c - k \sin \Omega \tau$$

$$\boxed{\Omega - \Omega_0 = -\alpha k \cos \Omega \tau - k \sin \Omega \tau} \quad \text{IV Bestimmungsgleichung für Frequenz } \Omega$$

$$\text{II: } I_c = \frac{P_N + k \cos \Omega \tau}{1 - 2k \cos \Omega \tau} = \frac{P_N - n_c}{1 + 2n_c}$$

• Feedback führt zur Abweichung der Ladungsträgerdichte von $n_c=0$ bei $\tau=0$

- zur Änderung der Intensität I_c

$$I_0 = I_c(\tau=0) = P_N$$

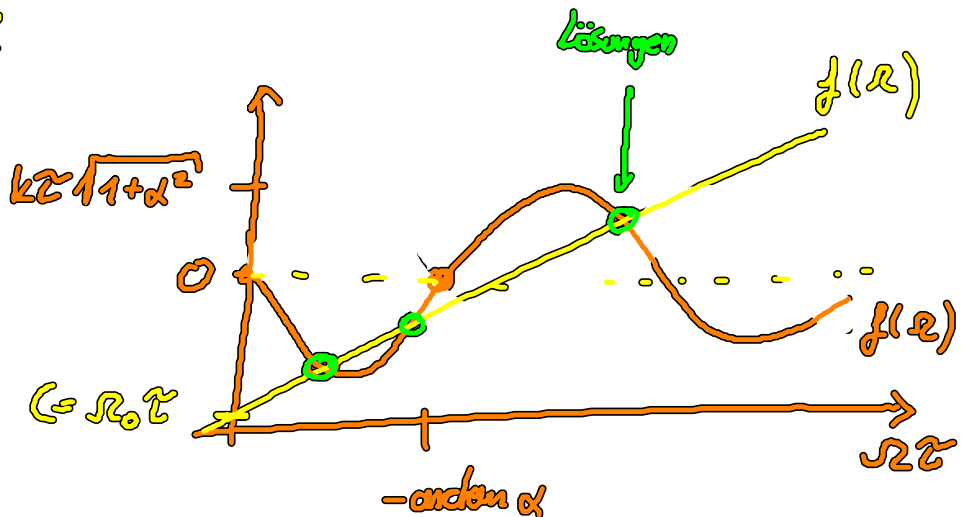
- konstruktive Interferenz $I_c > I_0$
- destruktive " $I_c < I_0$

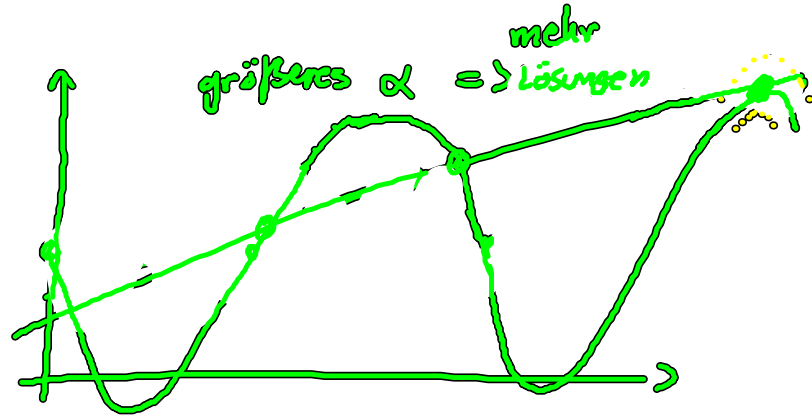
$$\text{V: } \tau(\Omega - \Omega_0) = -k\tau(\alpha \cos \Omega \tau + \sin \Omega \tau)$$

$$\underbrace{\tau(\Omega - \Omega_0)}_{g(\Omega)} = -k\tau \underbrace{\sqrt{1+\alpha^2} \sin(\Omega \tau + \arctan \alpha)}_{f(\Omega)} \quad (\text{Sinoid})$$

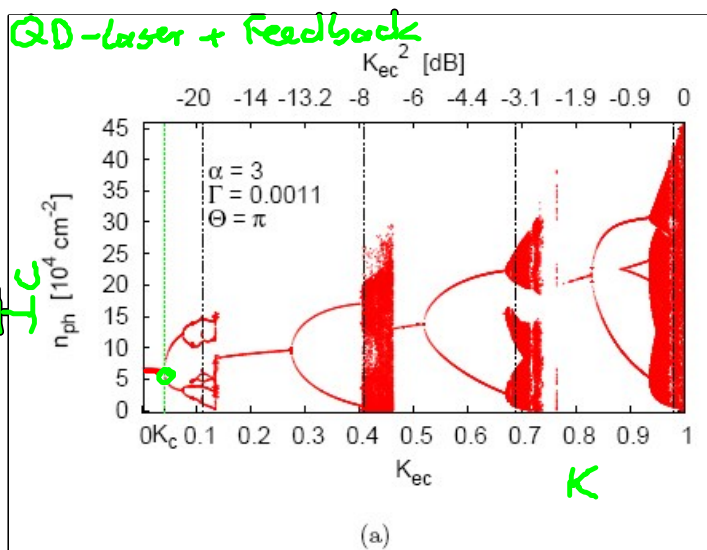
Transzendent Gleichung!

Grafische Lösung

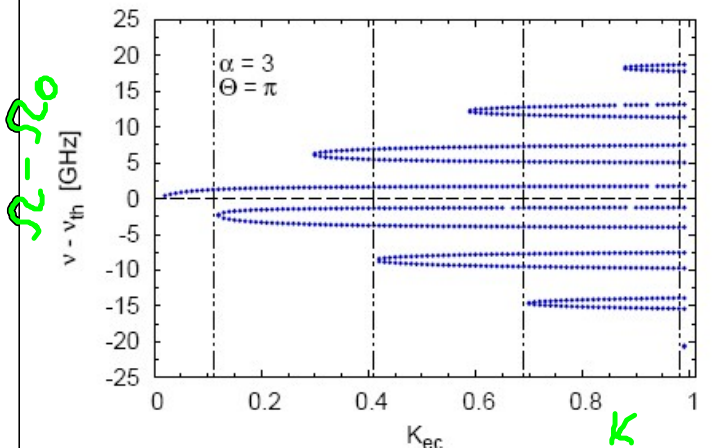




- Neue Lösungen entstehen in Sattel-Knoten Bifurkationen



\leftarrow Lichtintensität wird chaotisch mit höherem K



\leftarrow mögliche Lösungen für Ω im externen Resonator