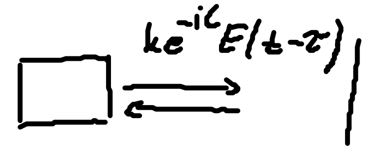
Lang Kobayashi Gleichungen

$$\dot{E} = (1+i\alpha) n E + k e^{-iC} E(t-\tau)$$

$$T\dot{n} = P_u - n - (1+2n)|E|^2$$



ECM Moden (externe Kavitätsmoden)
sind Lösungen der LK Gleichung mit konstanter Intensität I_c und konstantem n_c

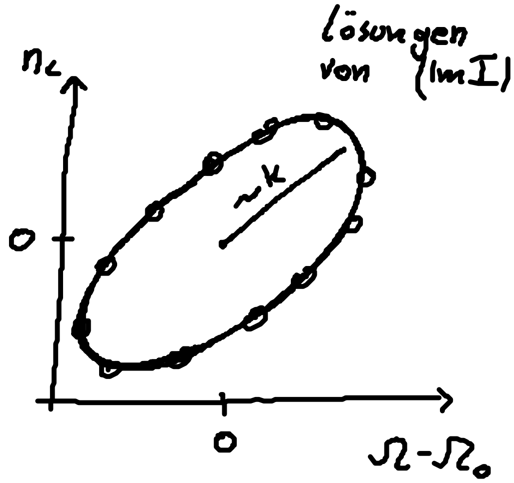
$$E = \sqrt{I_c}\, e^{i(\Omega - \Omega_0)t}$$

Bestimmungsgleichung für Ω:

$$(\mathrm{Re}\,I) \qquad n_c = -k \cos \Omega\tau$$

$$(\mathrm{Im}\,I) \qquad \Omega\tau - C - \alpha\tau n_c = -k\tau \sin\Omega\tau$$

$$\overset{(\mathrm{Re}\,I)^2 + (\mathrm{Im}\,I)^2}{\Leftrightarrow} \quad n_c^2 + (\Omega - \Omega_0 - \alpha n_c)^2 = k^2$$



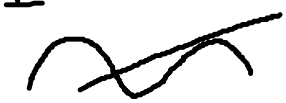
$$\alpha = 0: \quad n_c^2 + (\Omega - \Omega_0)^2 = k^2$$

$\rightarrow$ Kreis in $n_c / \Omega - \Omega_0$ Ebene

Rückkopplungsstärke k ändert Größe der Ellipse und α die Lage in $n_c / \Omega - \Omega_0$ Ebene

- Lösungen entstehen in Sattel-Knoten (SN) Bif. entstehen

Bedingung: Ableitung von $f(\Omega)$ und $g(\Omega)$ in $\underline{\text{IV}}$ muss gleich sein



$$\underline{\text{IV}}: \quad \tau(\Omega-\Omega_0) = -k\tau\sqrt{1+\alpha^2}\,\sin(\Omega\tau + \arctan\alpha)$$

$$= -k\tau(\alpha\cos\Omega\tau + \sin\Omega\tau)$$

(Sinosoid Formel für sin + cos)

Ableitung:

$$\boxed{1 = k\tau(\alpha\sin\Omega\tau - \cos\Omega\tau)}$$

Einsetzen von ReI, ImI $\Rightarrow$

$$1 = \alpha(C - \Omega\tau + \alpha\tau n_c^{SN}) + \tau n_c^{SN}$$

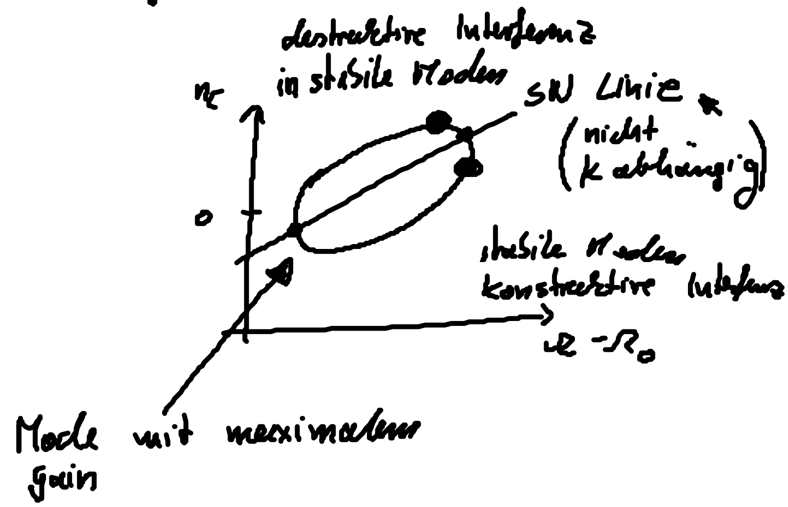
$$n_c^{SN} = \frac{1+\alpha(\Omega\tau - C)}{\tau(1+\alpha^2)}$$

Phase $C = \Omega_0\tau$

Ladungsträgerkonzentration an der SN Bifurkation

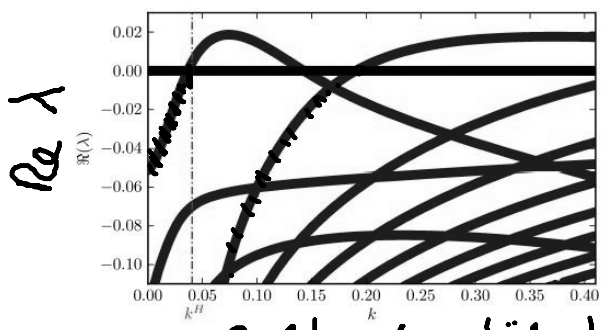
instabile Moden $\hat{=}$ Antimoden

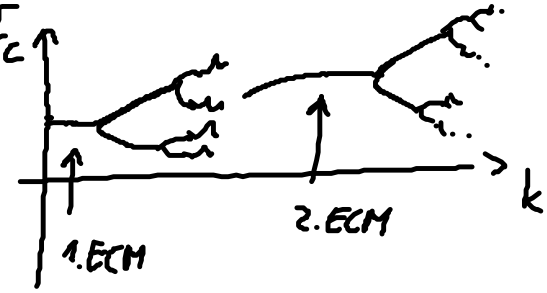
stabile Moden $\hat{=}$ Moden



Stabilität noch nicht bestimmt.

Ansatz: charakteristischen Polynom aufstellen + Eigenwerte bestimmen





ECM Mode verliert Stabilität in Hopf-Bifurkation

4.4.3. Optische Rückkopplung – Hopf-Bifurkation

Zunächst Umschreiben auf Intensität + Phase

$$E = \sqrt{I}\, e^{i\phi}$$

$$\dot E = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{I}}\dot I e^{i\phi} + i\dot\phi\sqrt{I}e^{i\phi}$$

$$\dot E \left\{ \boxed{\begin{aligned} \dot I &= 2nI + 2k\sqrt{I(t-\tau)I(t)}\,\cos(\phi(t-\tau)-\phi-C) \\ \dot\phi &= \alpha n + k\sqrt{\frac{I(t-\tau)}{I}}\,\sin(\phi(t-\tau)-\phi-C) \\ \dot n &= \gamma\left(P_n - n - (1+2n)I\right) \qquad\qquad \gamma = \frac{1}{T} \end{aligned}} \right. \quad (*)$$

Neue Variablen: wie beim Einzellaser 4.3.1. zum Umgehen der Singularität bei $\gamma = 0$

$$\omega_R = \sqrt{\gamma 2 P_n}$$

↑ RO Frequenz

$$s = \omega_R t$$

$$n = \frac{\omega_R}{2} x$$

$I = I_0(1+y)$ ...... Einsetzen in $\circledast$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} y' &= (1+y)\,x \\ \phi' &= \alpha \frac{x}{Z} \\ x' &= -y \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{aligned} &+ 2\frac{k}{\omega_R}\sqrt{(1+y)(1+y(s-\tau_s))}\,\cos(-C+\phi(s-\tau_s)-\phi) \\ &+ \frac{k}{\omega_R}\sqrt{\frac{1+y(s-\tau_s)}{1+y}}\,\sin(-C+\phi(s-\tau_s)-\phi) \\ &- \frac{\omega_R}{2P_N}\,x\,(1+2P_N(1+y)) \end{aligned}}_{f} \qquad \circledast_1$$

Im Fall $\frac{k}{\omega_R} = O(\omega_R)$ und $\omega_R \to 0$ also $\mu \to 0$

ist das Nullte Ordnungs Problem ein konservatives System mit periodischen Lösungen (x_0, y_0)

Erinnerung: $x_0 = -2A\sin\tilde{s} - A^2\frac{2}{3}\sin 2\tilde{s}$

$y_0 = 2A\cos\tilde{s} + \frac{4}{3}A^2\cos 2\tilde{s}$

4.3.1. für kleine A $\qquad \tilde{s} = 1 - \frac{1}{6}A^2$

Für $k=0$ ABER $\mu \neq 0$ sind Lösungen nicht mehr periodisch.

Mit Feedback $k>0$ wird bei Hopf Bifurkation die Dämpfung kompensiert und es entsteht wieder periodische Lösung.

$\Rightarrow$ Wenn $\circledast_1$ eine periodische Lösung hat dann ist das k der Punkt der Hopf Bifurkation.

Satz: Ein System $\underline{L}\underline{x} = \underline{f}$ (z.B. $\dot{\underline{x}} = D(t)\underline{x} + \underline{f}$) hat genau dann eine periodische Lösung, wenn die Lösung des homogenen adjungierten Problems (hier $\dot{\underline{x}}^* = -D^T(t)\underline{x}^*$) die Bedingung $\langle x_0^*, f \rangle = 0$ erfüllt.

Vor: $\dot{\underline{x}} = D(t)\underline{x}$ hat periodische Lösung

Beweis: ähnlich wie in 4.3.2.

sei: $L\underline{x} = \underline{f}$ und $L^* x_0^* = 0$

Def. adjungierten Operator
$\langle x, Ly \rangle = \langle L^* x, y \rangle$

p = Periode von x_0

$$\Rightarrow \langle \underline{x}_0^*, \underline{f} \rangle = \int_0^p \left(x_{01}^* f_1 + x_{02}^* f_2 \right) dt$$

$\underline{f} = L\underline{x}$

$$= \int_0^p \underline{x}_0^* \, \underline{L}\underline{x} \; dt$$

$$= \int_0^p \underbrace{L^* x_0^*}_{0} x \; dt = 0$$

$\blacksquare$

Anwendung auf Laser + Feedback also Gl $*_1$

- Zunächst Linearisieren des ungestörten Problems $\underline{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

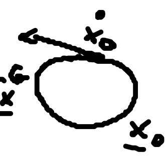
$$\delta \underline{x} = \underline{x} - \underline{x}_0$$

$$\delta \dot{\underline{x}} = Df|_{\underline{x}_0} \, \delta \underline{x}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1+y_0 & x_0 \end{pmatrix}}_{D(t)} \delta \underline{x}$$

$$\Rightarrow L \equiv \frac{d}{dt}\mathbb{1} - Df|_{x_0}$$

(Eine Lösung von $L\delta\underline{x}=0$ ist die Goldstone Mode $\dot{\underline{x}}_0 = \delta\underline{x}^G$)



adjungiertes Problem : $L^* \delta\underline{x}^* = 0$

$$0 = \left[-\frac{d}{dt}\mathbb{1} - \begin{pmatrix} 0 & 1+y_0 \\ -1 & x_0\end{pmatrix}\right]\delta\underline{x}^*$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \delta\dot{x}^* &= -(1+y_0)\,\delta y^* \\ \delta\dot{y}^* &= \delta x^* - x_0\,\delta y^* \end{aligned}$$

wir wissen $\langle \delta\underline{x}^G, \delta\underline{x}^*\rangle = 0$

$$0 = \int dt \left(-y_0 \delta x^* + (1+y_0) x_0 \,\delta y^*\right)$$

2 Unbekannte
1 Gleichung

$\Rightarrow$ wähle $\delta x^* = x_0$

$$\Rightarrow \delta y^* = \frac{y_0}{1+y_0}\,\frac{1}{x_0}\,\delta x^*$$

$$\delta y^* = \frac{y_0}{1+y_0}$$

$$\Rightarrow \delta\underline{x}^* = \begin{pmatrix} x_0 \\ \frac{y_0}{1+y_0}\end{pmatrix}$$ adjungierte Lösung von $L^*\delta\underline{x}^* = 0$

Periodische Lösungen von $L\underline{x} = f$ existieren wenn $\langle \delta \underline{x}^*, f \rangle = 0$

=> Hopf Bifurkation wenn

$$0 = 2\frac{k}{\omega_R} \int_0^P \sqrt{(1+y_0)(1+y_0(s-\tau_s))} \cos\left(-C + \phi(s-\tau_s) - \phi\right) \frac{y_0}{1+y_0} \, ds$$

$$- \frac{\omega_e}{2P_N} \int_0^P x_0^2 \left(1 + 2P(1+y_0)\right) ds$$

Bedingung für k!

Bem.: Phasengleichung
wenn y bekannt $\rightarrow$ $\phi = \frac{\alpha}{2} \ln(1+y_0)$
(aus konservativen Gleichungen)