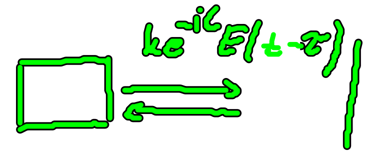
Lang Kobayashi Gleichungen

$$\dot{E} = (1 + i\alpha) n E + k e^{-iC} E(t-\tau)$$

$$T\dot{n} = P_u - n - (1+2n)|E|^2$$




ECM Moden (externe Kavitätsmoden)

sind Lösungen der LK Gleichung mit konstanter Intensität $I_c$ und konstantem $n_c$

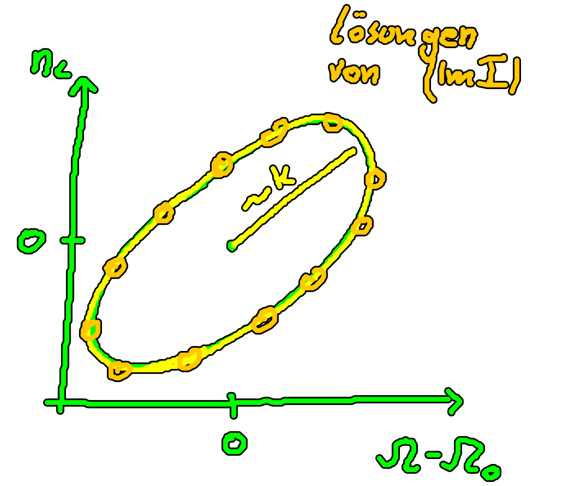
$$E = \sqrt{I_c}\, e^{i(\Omega - \Omega_0)t}$$

Bestimmungsgleichung für $\Omega$:

$$(\mathrm{Re}\,I) \quad n_c = -k\cos\Omega\tau$$

$$(\mathrm{Im}\,I) \quad \Omega\tau - C - \alpha\tau n_c = -k\tau\sin\Omega\tau$$

$$(\mathrm{Re}\,I)^2 + (\mathrm{Im}\,I)^2 \iff n_c^2 + (\Omega - \Omega_0 - \alpha n_c)^2 = k^2$$



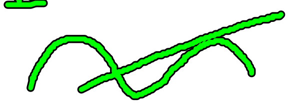

$$\alpha = 0: \quad n_c^2 + (\Omega - \Omega_0)^2 = k^2$$

→ Kreis in $n_c / \Omega - \Omega_0$ Ebene

Rückkopplungsstärke $k$ ändert Größe der Ellipse und $\alpha$ die Lage in $n_c/\Omega - \Omega_0$ Ebene

• Lösungen entstehen in Sattel-Knoten (SN) Bif. entstehen

Bedingung: Ableitung von $f(\Omega)$ und $g(\Omega)$ in $\underline{\text{IV}}$ muss gleich sein



$$\underline{\text{IV}}: \quad \tau(\Omega - \Omega_0) = -k\tau\sqrt{1+\alpha^2}\,\sin(\Omega\tau + \arctan\alpha)$$

$$= -k\tau(\alpha\cos\Omega\tau + \sin\Omega\tau)$$

(Sinusoid Formel für sin + cos

Ableitung:

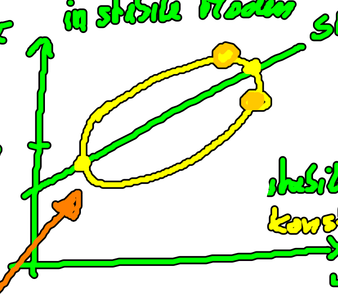
$$\boxed{1 = k\tau(\alpha\sin\Omega\tau - \cos\Omega\tau)}$$

Einsetzen von Re I, Im I $\Rightarrow$ $1 = \alpha(C - \Omega\tau + \alpha\tau n_c^{SN}) + \tau n_c^{SN}$

Phase $C = \Omega_0\tau$

$$n_c^{SN} = \frac{1 + \alpha(\Omega\tau - C)}{\tau(1+\alpha^2)}$$

Ladungsträgerkonzentration an der SN Bifurkation



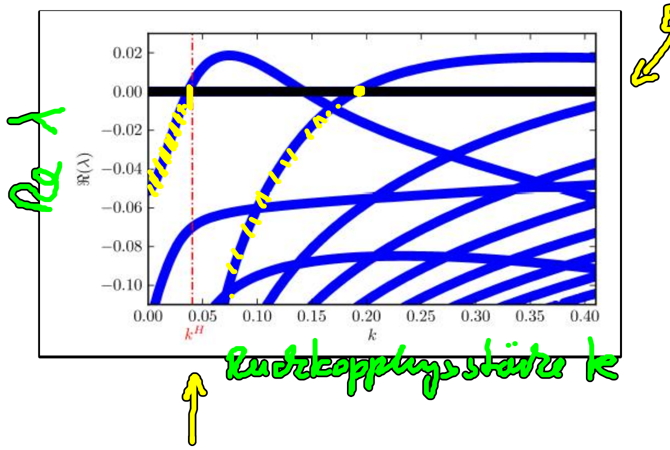

instabile Moden ≙ Antimoden

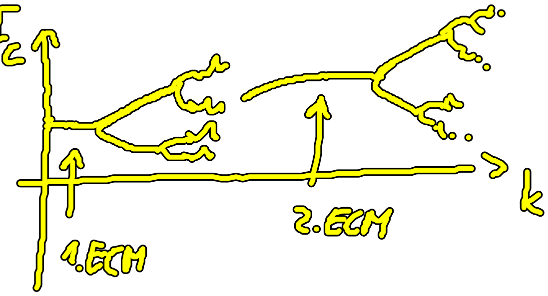
stabile Moden ≙ Moden

Stabilität noch nicht bestimmt.

Ansatz: charakteristisches Polynom aufstellen + Eigenwerte bestimmen

EW der ersten ECM Mode




ECM Mode verliert Stabilität in Hopf-Bifurkation

## 4.4.3. Optische Rückkopplung – Hopf-Bifurkation

zunächst Umschreiben auf Intensität + Phase

$$E = \sqrt{I}\, e^{i\phi}$$

$$\dot{E} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{I}}\dot{I} e^{i\phi} + i\dot{\phi}\sqrt{I} e^{i\phi}$$

$$\dot{E}\left\{\boxed{\begin{aligned}
\dot{I} &= 2nI + 2k\sqrt{I(t-\tau)I(t)}\,\cos(\phi(t-\tau) - \phi - C) \\
\dot{\phi} &= \alpha n + k\sqrt{\frac{I(t-\tau)}{I}}\,\sin(\phi(t-\tau) - \phi - C) \\
\dot{n} &= \gamma\,(P_n - n - (1+2n)I) \qquad \gamma = \frac{1}{T}
\end{aligned}}\right. \quad (*)$$

Neue Variablen: wie beim Einzellaser 4.3.1. zum Umgehen der Singularität bei $\gamma = 0$

$$\omega_R = \sqrt{\gamma 2 P_N}$$

↑ RO Frequenz

$$s = \omega_R t$$

$$n = \frac{\omega_R}{2} X$$

$I = I_0(1+y)$ ..... Einsetzen in $(*)$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} y' &= (1+y)\,x \\ \phi' &= \alpha \frac{x}{2} \\ x' &= -y \underbrace{+ 2\frac{k}{\omega_R}\sqrt{(1+y)(1+y(s-\tau_s))}\,\cos(-\zeta+\phi(s-\tau_s)-\phi) + \frac{k}{\omega_R}\sqrt{\frac{1+y(s-\tau_s)}{1+y}}\,\sin(-\zeta+\phi(s-\tau_s)-\phi) - \frac{\omega_R}{2P_N}\,x\,(1+2P_N(1+y))}_{f} \end{aligned} \qquad (*)_1$$

Im Fall $\frac{k}{\omega_R} = O(\omega_R)$ und $\omega_R \to 0$ also $\mu \to 0$

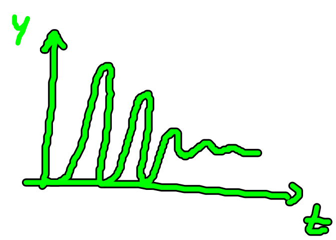
ist das Nullte Ordnungs Problem ein konservatives System mit periodischen Lösungen $(x_0, y_0)$

Erinnerung: $x_0 = -2A\sin\tilde{\xi} - A^2\frac{2}{3}\sin 2\tilde{\xi}$

$y_0 = 2A\cos\tilde{\xi} + \frac{4}{3}A^2\cos 2\tilde{\xi}$

4.3.1. für kleine A $\quad \tilde{\xi} = 1 - \frac{1}{6}A^2$

Für $k=0$ ABER $\mu \neq 0$ sind Lösungen nicht mehr periodisch.




Mit Feedback $k>0$ wird bei Hopf Bifurkation die Dämpfung kompensiert und es entsteht wieder periodische Lösung.

$\Rightarrow$ Wenn $(*)_1$ eine periodische Lösung hat dann ist das $k$ der Punkt der Hopf Bifurkation.

**Satz:** Ein System $\mathcal{L}\underline{x} = \underline{f}$ (z.B. $\dot{\underline{x}} = D(t)\underline{x} + \underline{f}$ ) hat genau dann eine periodische Lösung, wenn die Lösung des homogenen adjungierten Problems (hier $\dot{\underline{x}}^* = -D^T(t)\underline{x}^*$) die Bedingung $\langle x_0^*, f \rangle = 0$ erfüllt.

Vor: $\dot{\underline{x}} = D(t)\underline{x}$ hat periodische Lösung

**Beweis:** ähnlich wie in 4.3.2.

sei: $\mathcal{L}\underline{x} = \underline{f}$ und $\mathcal{L}^* x_0^* = 0$

Def. adjungierter Operator
$$\langle x, \mathcal{L}y \rangle = \langle \mathcal{L}^* x, y \rangle$$

p = Periode von $x_0$

$$\Rightarrow \langle \underline{x}_0^*, \underline{f} \rangle = \int_0^p (x_{01}^* f_1 + x_{02}^* f_2)\, dt$$

$\underline{f} = \mathcal{L}\underline{x}$

$$= \int_0^p \underline{x}_0^* \underline{\mathcal{L}}\underline{x}\, dt$$

$$= \int_0^p \underbrace{\mathcal{L}^* x_0^*}_{0} x\, dt = 0$$

∎

Anwendung auf Laser + Feedback also GL $*_1$

- Zunächst Linearisieren des ungestörten Problems $\underline{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

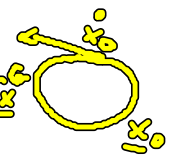
$$\delta\underline{x} = \underline{x} - \underline{x}_0$$

$$\delta\dot{\underline{x}} = Df\big|_{\underline{x}_0}\,\delta\underline{x}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1+y_0 & x_0 \end{pmatrix}}_{D(t)} \delta\underline{x}$$

$$\Rightarrow L \equiv \frac{d}{dt}\underline{\mathbb{1}} - Df\big|_{x_0}$$

(Eine Lösung von $L\delta\underline{x} = 0$ ist die Goldstone Mode $\dot{\underline{x}}_0 = \delta\underline{x}^G$)




adjungiertes Problem : $L^{*}\,\delta\underline{x}^{*} = 0$

$$0 = \left[-\frac{d}{dt}\underline{\mathbb{1}} - \begin{pmatrix} 0 & 1+y_0 \\ -1 & x_0 \end{pmatrix}\right]\delta\underline{x}^{*}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \delta\dot{x}^{*} &= -(1+y_0)\,\delta y^{*} \\ \delta\dot{y}^{*} &= \delta x^{*} - x_0\,\delta y^{*} \end{aligned}$$

wir wissen $\langle \delta\underline{x}^{G}, \delta\underline{x}^{*} \rangle = 0$

$$0 = \int dt\left(-y_0\,\delta x^{*} + (1+y_0)x_0\,\delta y^{*}\right)$$

2 Unbekannte
1 Gleichung

$\Rightarrow$ wähle $\delta x^{*} = x_0$

$$\Rightarrow \delta y^{*} = \frac{y_0}{1+y_0}\,\frac{1}{x_0}\,\delta x^{*}$$

$$\delta y^{*} = \frac{y_0}{1+y_0}$$

$$\Rightarrow \delta\underline{x}^{*} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dfrac{y_0}{1+y_0} \end{pmatrix}$$

adjungierte Lösung von $L^{*}\delta\underline{x}^{*} = 0$

Periodische Lösungen von $L\underline{x} = f$ existieren wenn $\langle \delta \underline{x}^*, f \rangle = 0$

=> Hopf Bifurkation wenn

$$0 = 2\frac{k}{\omega_R} \int_0^P \sqrt{(1+y_0)(1+y_0(s-\tau_d))} \cos\left(-C + \phi(s-\tau_d) - \phi\right) \frac{y_0}{1+y_0} \, ds$$

$$- \frac{\omega_R}{2P_N} \int_0^P x_0^2 \left(1 + 2P(1+y_0)\right) ds$$

Bedingung für k!

Bem.: Phasengleichung
wenn y bekannt → $\phi = \frac{\alpha}{2} \ln(1+y_0)$
(aus konservativen Gleichungen)