

Nachtrag zu 4.4.3 : Laser mit optischer Rückkopplung

Ziel: Analytische Bedingung für Hopf Bifurkation der ersten ECM (externe Kavitätsmoden)

Weg: Bifurkationsbedingung gewonnen aus Existenzbed. für period. Lösungen

- x_0, y_0 sind period. Lösung der Lasergleichung ohne Dämpfung

Intensität $y' = (1 + y)x$

Invension $x' = -y$

Phase $\phi' = \frac{\alpha}{2} x$

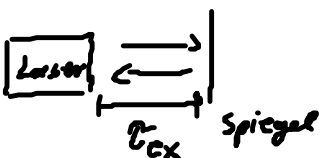
es gilt:

(s skalierte Zeit)
 $s = \omega_R t$

• $\int_0^{P=Periode} x_0^2 y_0 ds$

$$= \int x_0^2 (-\dot{x}_0) ds = - \int_{x_0(0)}^{x_0(P)} x_0^2 dx_0 = 0$$

• $\int_0^P y_0 ds = - \int dx_0 = 0$



Bedingung an k (Rückkopplungsstärke) für Hopf-Bif.:

$$0 = 2k \int_0^P \sqrt{\frac{1 + y_0(s - \tau_s)}{1 + y_0}} y_0 \cos(-C + \phi(s - \tau_s) - \phi) ds - \frac{1 + 2P\mu}{T} \int_0^P x_0^2 ds$$

- Entwicklung des Integrals für kleine y_0 also kleine ϕ

• Phasengleichung $\phi' = \frac{\alpha}{2} x$

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\alpha}{2} x$$

$$\frac{dy}{1+y} = x ds$$

$$\Rightarrow d\phi = \frac{\alpha}{2} dy \frac{1}{1+y} \Rightarrow \phi = \frac{\alpha}{2} \ln(1+y)$$

falls y klein

$$\phi \approx \frac{\alpha}{2} y$$

Erinnerung:

τ_{ex} Laufzeit im Resonator

$$\tau = \frac{\tau_{ex}}{\bar{\nu}_p}$$

$$\tau_s = \omega_R \tau$$

wir verwenden

$$\cos(-C + \phi(s - \tau_s) - \phi) = \cos\left[-C + \frac{\alpha}{2} (y_0(s - \tau_s) - y_0)\right]$$

\approx Taylor für kleine $y_0(s - \tau_s) - y_0$

$$\approx \cos(-C) - \sin(-C) \frac{\alpha}{2} (y_0(s - \tau_s) - y_0)$$

Sowie

$$\sqrt{\frac{1+y_0}{1+y_0} + \frac{y_0(s-z_s) - y_0}{1+y_0}}$$

Taylor um 1

$$\approx 1 + \frac{y_0(s-z_s) - y_0}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= 2k \cos(-c) \int_0^p \left(y_0 + y_0 \frac{y_0(s-z_s) - y_0}{2} \right) ds \\ &\quad - 2k \sin(-c) \frac{\alpha}{2} \int_0^p y_0 (y_0(s-z_s) - y_0) ds + O(y_0^2) \\ &\quad - \frac{1+2P_N}{T} \int_0^p x_0^2 ds \end{aligned}$$

x_0, y_0 sind bekannt

$$\int y_0 ds = 0$$

$$0 = k \left(\cos c + \sin c \cdot \alpha \right) \underbrace{\int_0^p [y_0(s-z_s) - y_0] y_0 ds}_{-2 \cdot 4\pi A^2 \cdot \sin^2 \frac{z_s}{2}} - \underbrace{\frac{1+2P_N}{T} \int_0^p x_0^2 ds}_{4\pi A^2 + O(A^4)}$$

=> Bedingung an k

$$k_H = \frac{-(1+2P_N)}{2T} \frac{1}{\left(\cos c + \sin c \cdot \alpha \right) \sin^2 \left[\omega_e \frac{z}{2} \right]}$$

$$\Gamma_{R0} = \frac{(1+2PN)}{2T}$$

• Im Experiment Phase ζ selektiv zu kontrollieren

→ Abschätzen des min. Wertes von k_H

$$\cos(\zeta - \arctan \alpha) = 1$$

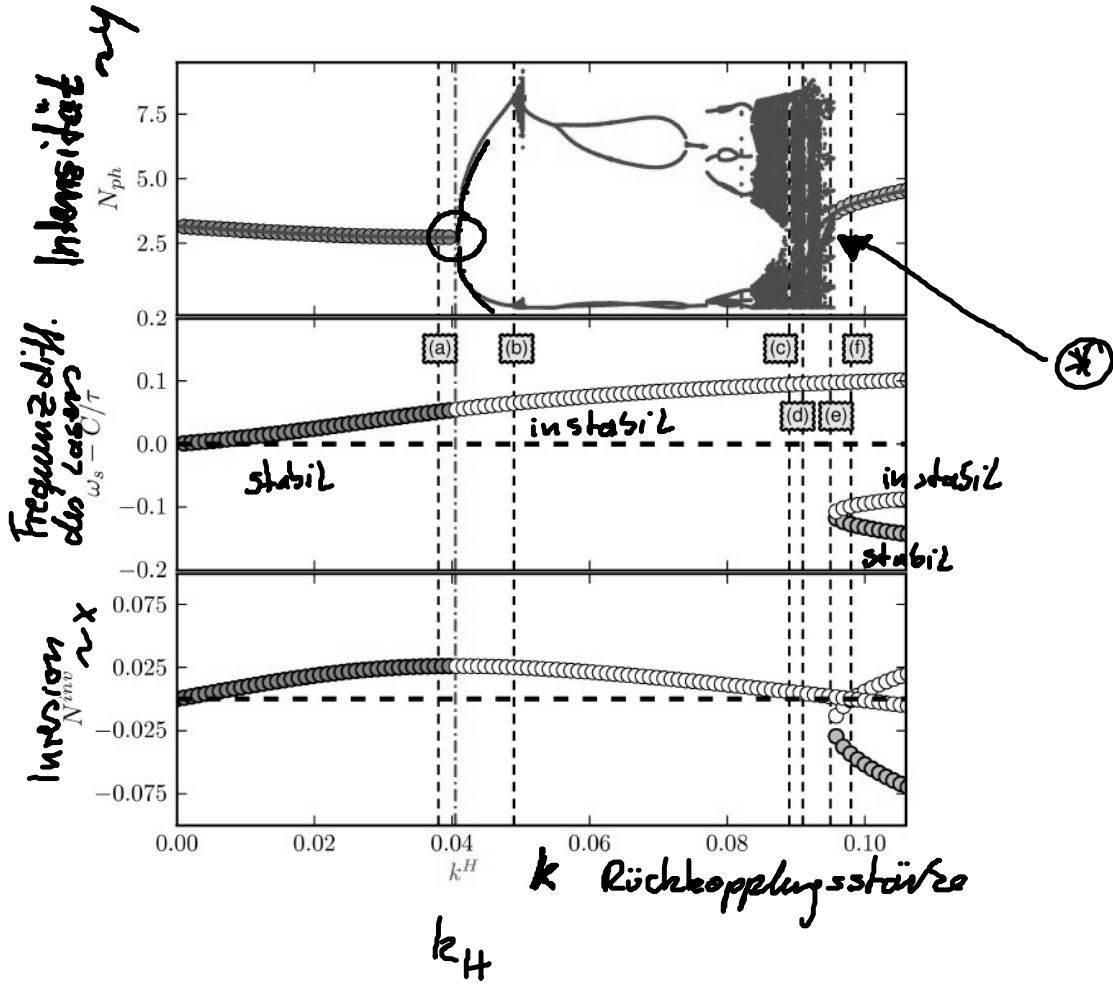
$$k_H \geq \frac{\Gamma_{R0}}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{1}{\sin^2[\omega_R \tau/2]}$$

Annahme:

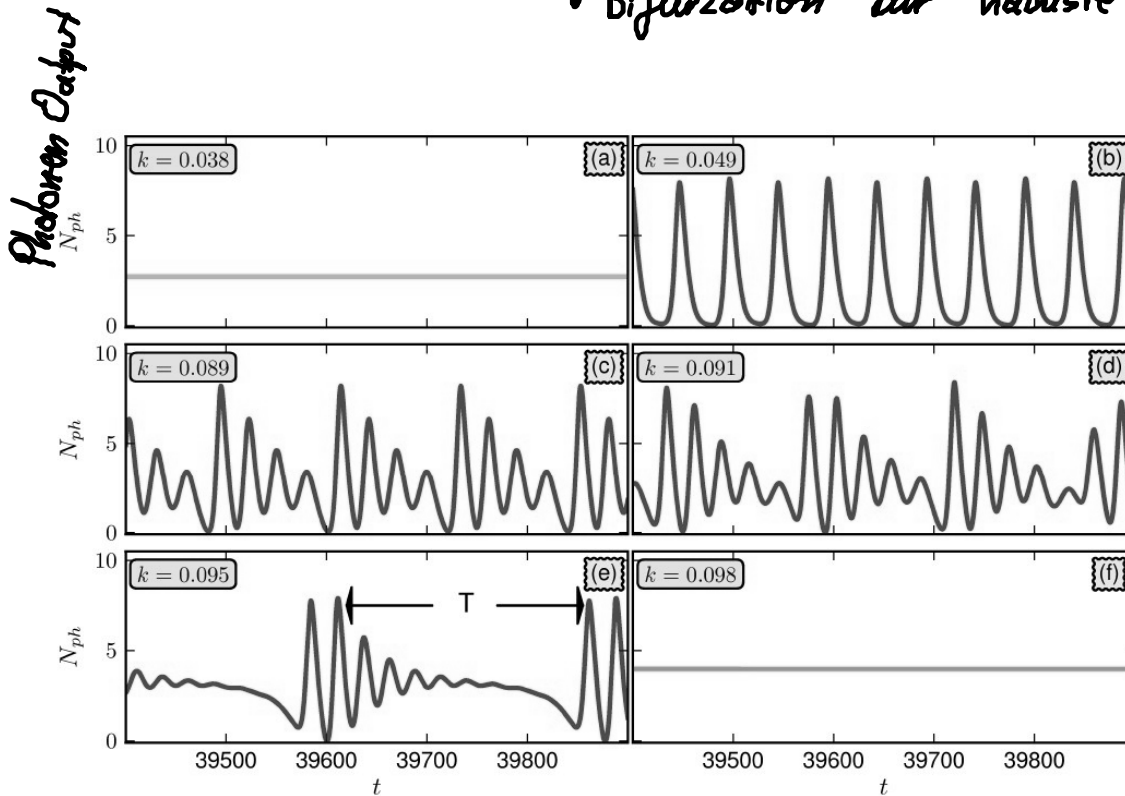
$$\sin[\omega_R \tau/2] = 1$$

$$\Rightarrow k_H \geq \frac{\Gamma_{R0}}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

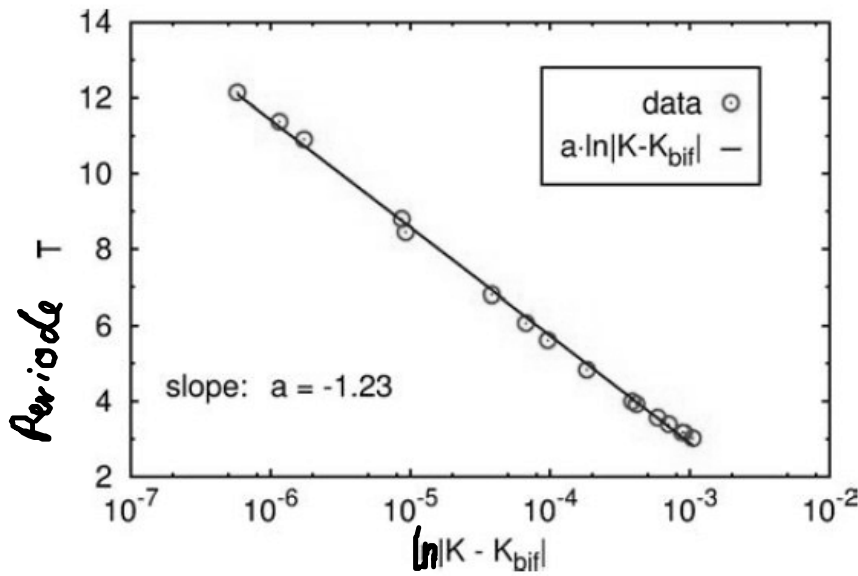
• Sobald Feedback den Einfluss der Dämpfung kompensieren kann wird Laser instabil also es ex. periodische Lösungen



- Periodenverdopplungskaskade ins Chaos
- Bifurkation zur nächste ECM Lösung *



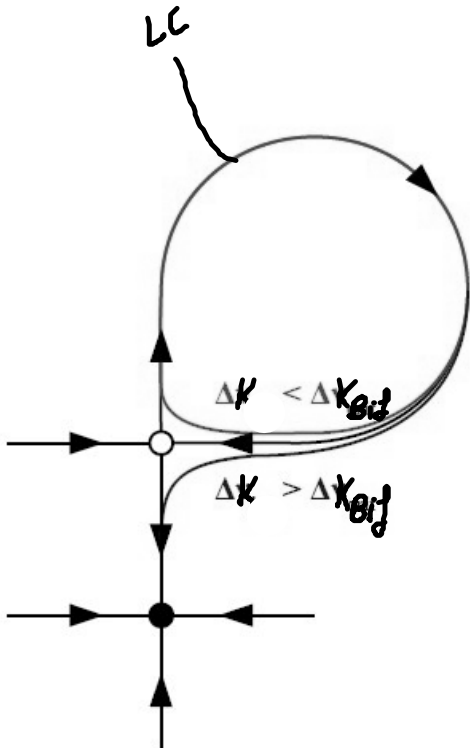
- Periode T steigt in der Nähe des Bifurkationspunktes K_{bif} mit dem Abstand $(K - K_{bif})$, d.h. T wird größer mit kleinerem $(K - K_{bif})$



$$T \sim \ln(K - K_{bif})$$

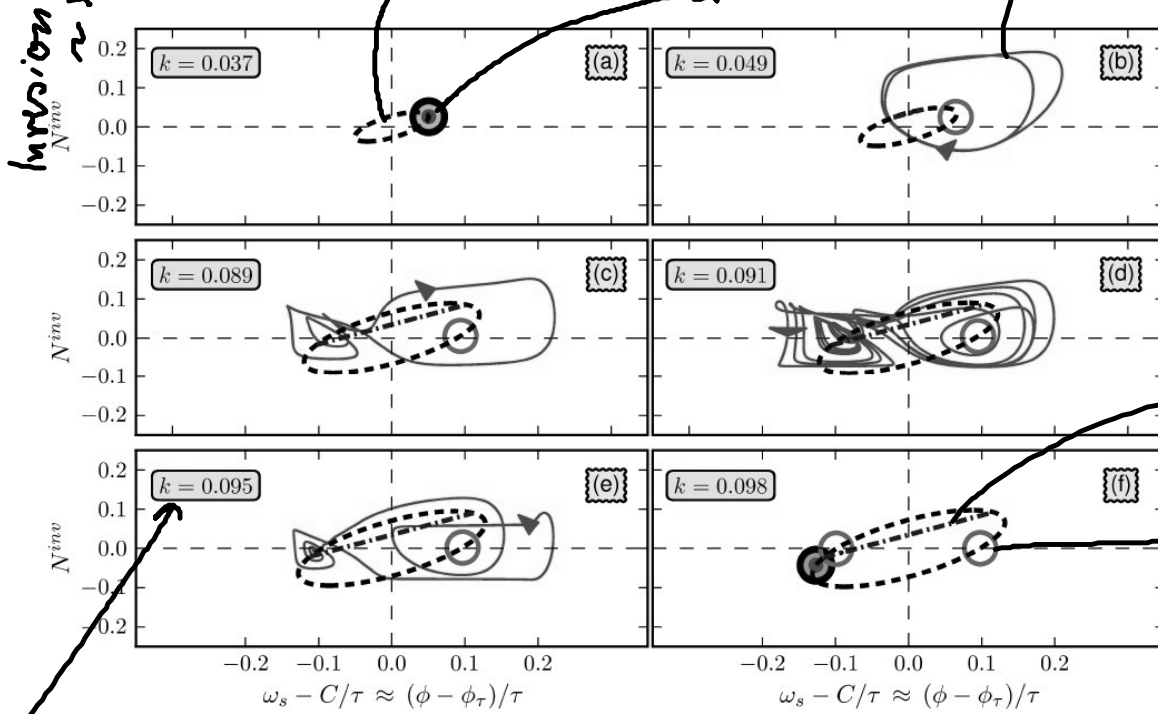
⇒ Homokline Bifurkation

- Grenzzyklus stößt an Sattelpunkt, es bildet sich ein Homokliner Orbit
- Periode wird unendlich
- Amplitude bleibt endlich



Ellipse auf der ECH Lösungen entstehen
— stabile Fläche

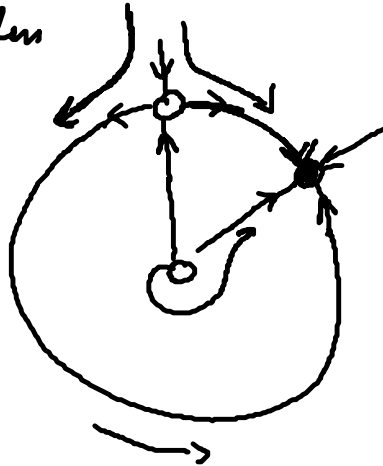
— Trajektorien



kurz vor
homoklin. Bif.

Frequenz des Lasers
(Abweichung vom Wert ohne Rückkopplung)

Bemerkung: unendliche Periode gibt es auch bei
SNIPER Bifurkation aber mit anderem
Skalierungsverhalten



$$T \sim (K - K_{0,2})^{-1/2}$$

• Tabelle zum Stabilitätsverhalten

	Amplitude des stabilen Grenzzyklus	Periode
1.3. (B) superkritische Hopf	$O(\sqrt{ K - K_{Bif} })$	$O(1)$
(C1) Sattel-Knoten von ZL	$O(1)$	$O(1)$
(D1) SNIPER	$O(1)$	$O(K - K_{Bif})^{-\frac{1}{2}}$
(D2) Homokline Bif	$O(1)$	$O(\ln(K - K_{Bif}))$

Zusammenfassung Laser:

• Laserschwelle ist eine Stimmgabel Bifurkation

– Normalform herleiten über störungstheoretischen Vielzeiteransatz
4.2.2.

– Laserspiking beschreibbar durch asymptotische Entwicklung der Gleichungen
(nach Ordnungen von $\sqrt{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{T}}$)

• Lösung mit Poincaré-Lindstedt
Methode mit gestreckter Zeit $\tau = \omega(\epsilon)t$
4.3.2.

• optische Rückkopplung verursacht neue Bifurkationen und destabilisiert (meist) den Laser

– Lösungen (ECM) entstehen in Sattel-Knoten Bif. und liegen auf einer Ellipse im Plot (Inursion über Frequenz)

— Erste Hopf Bifurkation analytisch bestimmbar

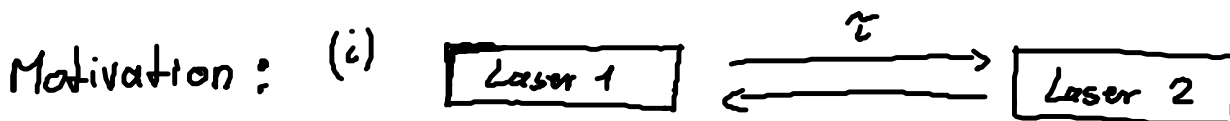
$$k_H \geq \frac{\Gamma_{R0}}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

— ^{ausschließend} Periodenverdopplungskaskade ins Chaos

— Bistabilität tritt auf zwischen stabilen Lösungen und chaotischen Attraktoren

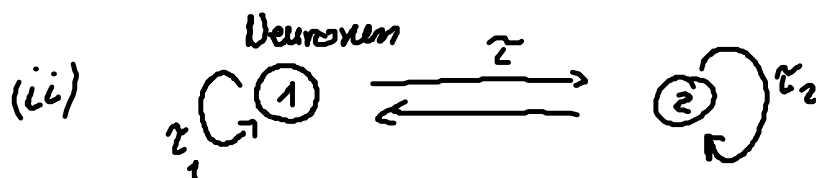
5. Gekoppelte Systeme und Netzwerke

5.1. 2 gekoppelte Systeme



$\tau \neq 0$ Signallaufzeit

Fragestellung z.B. wann und beide Laser synchronisiert



$\tau \neq 0$ durch neuronale Kopplung

als Startpunkt einfaches Modell für Systeme

subkritische Hopf - Normalformen

komplexe Größe
 $z = x + iy \in \mathbb{C}$

Systemgleichungen

$$\dot{z}_1 = (\lambda + i\omega + (1 + iy)|z_1|^2)z_1 + \alpha(z_2 - z_1)$$

$$\dot{z}_2 = (\lambda + i\omega + (1 + iy)|z_2|^2)z_2 + \alpha(z_1 - z_2)$$

diffusive
Kopplung