

# Nachtrag zu 4.4.3 : Laser mit optischer Rückkopplung

Ziel: Analytische Bedingung für Hopf Bifurkation der ersten ECM (externes Kavitätsmoden)

Weg: Bifurkationsbedingung gewonnen aus Existenzbed. für period. Lösungen

•  $x_0, y_0$  sind period. Lösung der Lasergleichung ohne Dämpfung

Intensität  $y' = (1 + y)x$

Inversion  $x' = -y$

Phase  $\phi' = \frac{\alpha}{2} x$

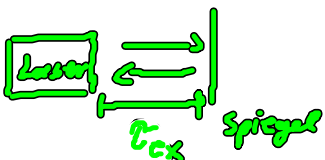
(s statierte Zeit)  
( $s = \omega_R t$ )

es gilt:

$$\bullet \int_0^P x_0^2 y_0 ds$$

$$= \int x_0^2 (-\dot{x}_0) ds = - \int_{x_0(0)}^{x_0(P)} x_0^2 dx_0 = 0$$

$$\bullet \int_0^P y_0 ds = - \int dx_0 = 0$$



Bedingung an  $k$  (Rückkopplungsstärke) für Hopf-Bif.:

$$0 = 2k \int_0^P \sqrt{\frac{1 + y_0(s - \tau_s)}{1 + y_0}} y_0 \cos(-C + \phi(s - \tau_s) - \phi) ds - \frac{1 + 2P\mu}{T} \int_0^P x_0^2 ds$$

- Entwicklung des Integrals für kleine  $y_0$  also kleine  $\phi$

• Phasengleichung  $\phi' = \frac{\alpha}{2} x$

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\alpha}{2} x$$

$$\frac{dy}{1+y} = x ds$$

$$\Rightarrow d\phi = \frac{\alpha}{2} dy \frac{1}{1+y} \Rightarrow \phi = \frac{\alpha}{2} \ln(1+y)$$

falls  $y$  klein

$$\phi \approx \frac{\alpha}{2} y$$

Erinnerung:

$\tau_{ex}$  Laufzeit im Resonator

$$\tau = \frac{\tau_{ex}}{\bar{\nu}_p}$$

$$\tau_s = \omega_R \tau$$

wir verwenden

$$\cos(-C + \phi(s - \tau_s) - \phi) = \cos\left[-C + \frac{\alpha}{2} (y_0(s - \tau_s) - y_0)\right]$$

$\approx$  Taylor für kleine  $y_0(s - \tau_s) - y_0$

$$\approx \cos(-C) - \sin(-C) \frac{\alpha}{2} (y_0(s - \tau_s) - y_0)$$

Sowie

$$\sqrt{\frac{1+y_0}{1+y_0} + \frac{y_0(s-z_s) - y_0}{1+y_0}}$$

Taylor um 1

$$\approx 1 + \frac{y_0(s-z_s) - y_0}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{O} &= 2k \cos(-c) \int_0^P \left( y_0 + y_0 \frac{y_0(s-z_s) - y_0}{2} \right) ds \\ &\quad - 2b \sin(-c) \frac{\alpha}{2} \int_0^P y_0 (y_0(s-z_s) - y_0) ds + \mathcal{O}(y_0^2) \\ &\quad - \frac{1+2P_0}{T} \int_0^P x_0^2 ds \end{aligned}$$

$x_0, y_0$  sind bekannt

$$\int y_0 ds = 0$$

$$\mathcal{O} = k \left( \cos c + \sin c \cdot \alpha \right) \underbrace{\int_0^P [y_0(s-z_s) - y_0] y_0 ds}_{-2 \cdot 4\pi A^2 \cdot \sin^2 \frac{z_s}{2}} - \frac{1+2P_0}{T} \underbrace{\int_0^P x_0^2 ds}_{4\pi A^2 + \mathcal{O}(A^4)}$$

=> Bedingung an k

$$k_H = \frac{-(1+2P_0)}{2T} \frac{1}{\left( \cos c + \sin c \cdot \alpha \right) \sin^2 \left[ \omega_e \frac{z}{2} \right]}$$

$$\Gamma_{RO} = \frac{(1+2P_N)}{2T}$$

- Im Experiment Phase  $\zeta$  schlecht zu kontrollieren

→ Abschätzen des min. Wertes von  $k_H$

$$\cos(\zeta - \arctan \alpha) = 1$$

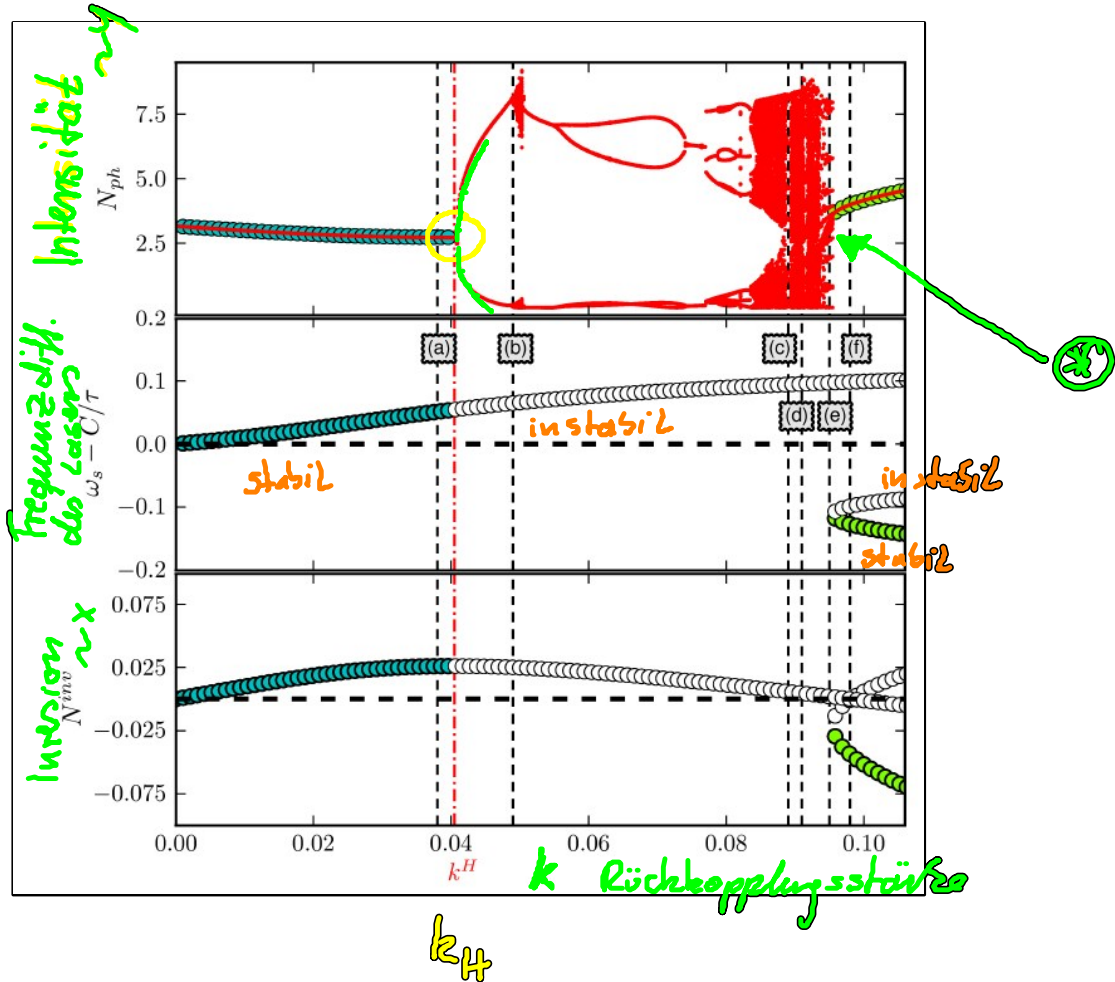
$$k_H \geq \frac{\Gamma_{RO}}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{1}{\sin^2[\omega_R \frac{T}{2}]}$$

Annahme:

$$\sin[\omega_R \frac{T}{2}] = 1$$

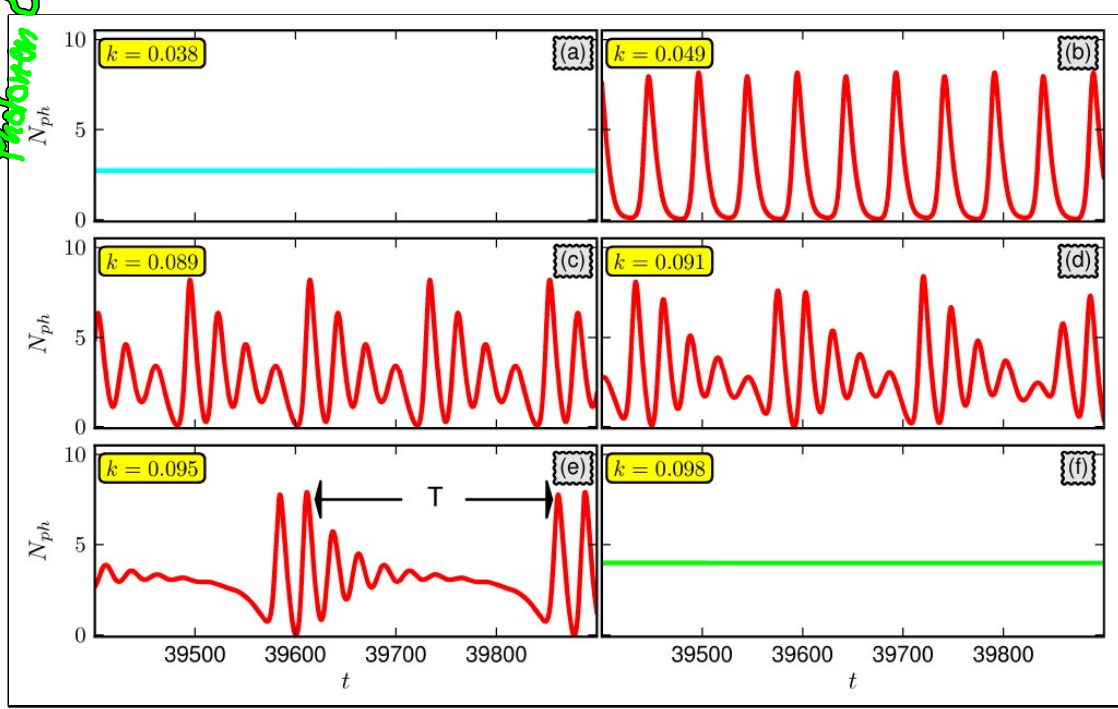
$$\Rightarrow k_H \geq \frac{\Gamma_{RO}}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

- Sobald Feedback den Einfluss der Dämpfung kompensieren kann wird Laser instabil also es ex. periodische Lösungen

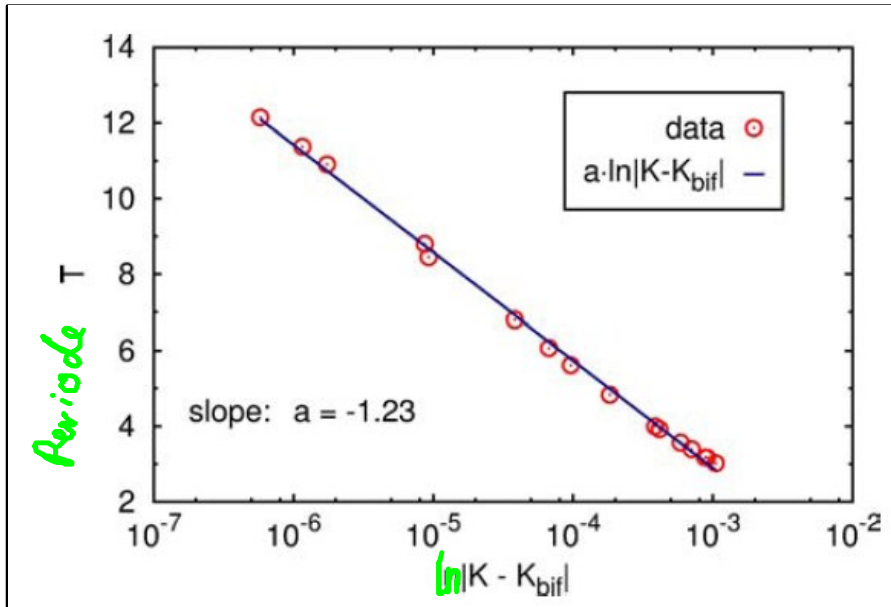


- Periodenverdopplungskaskade ins Chaos
- Bifurkation zur nächste ECM Lösung ⊗

Problem dabei



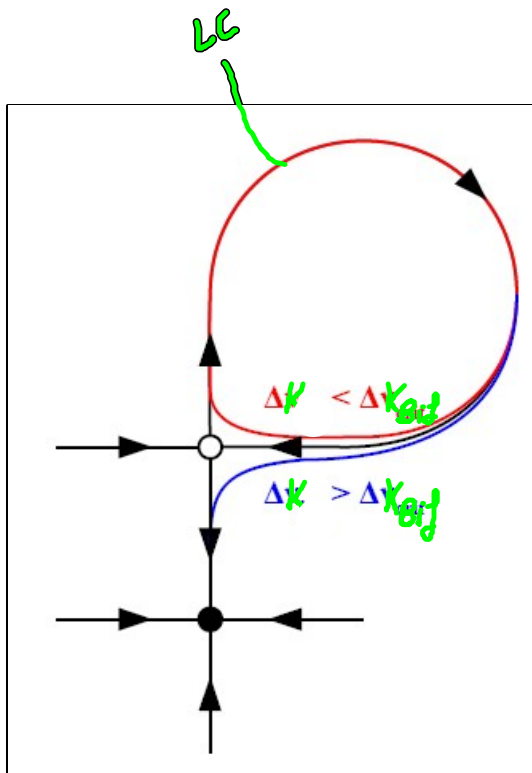
- Periode  $T$  steigt in der Nähe des Bifurkationspunktes  $K_{bif}$  mit dem Abstand  $(K - K_{bif})$ , d.h.  $T$  wird größer mit kleinerem  $(K - K_{bif})$



$$T \sim \ln(K - K_{bif})$$

=> Homokline Bifurkation

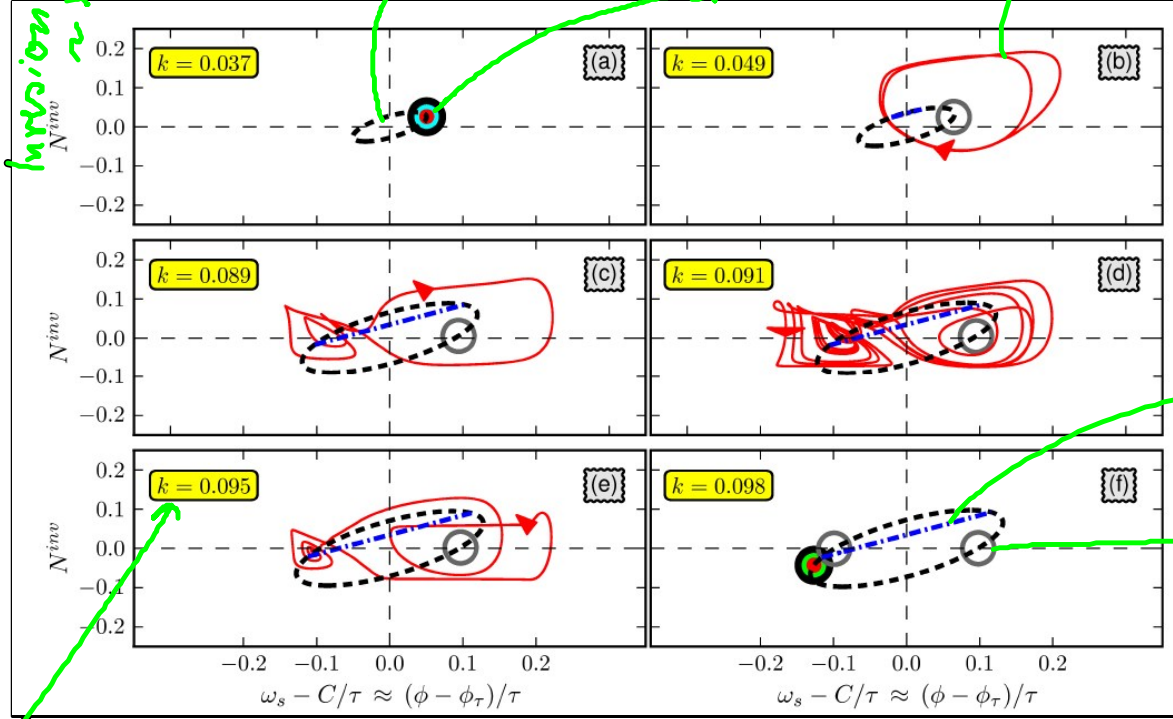
- Grenzzyklus stößt an Sattelpunkt, es bildet sich ein Homokliner Orbit
- Periode wird unendlich
- Amplitude bleibt endlich



x

Ellipse auf der sich Lösungen entstehen  
— stabile Punkte

— Trajektorien



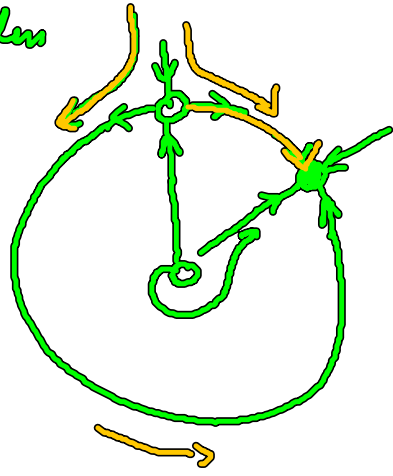
Sattel-Knoten  
Linien

instabile Mode

kurz vor  
homoklin. Bif.

Frequenz des Lasers  
(Abweichung vom Wert ohne Rückkopplung)

Bemerkung: unendliche Periode gibt es auch bei  
SNIPER Bifurkation aber mit anderem  
Skalierungsverhalten



$$T \sim (K - K_{0,2})^{-1/2}$$

• Tabelle zum Stabilitätsverhalten

	Amplitude des stabilen Grenzzyklus	Periode
<u>1.3.</u> (B) superkritische Hopf	$O(\sqrt{ K - K_{Bif} })$	$O(1)$
(C1) Sattel-Knoten von $ZC$	$O(1)$	$O(1)$
(D1) SNIPER	$O(1)$	$O( K - K_{Bif} )^{-\frac{1}{2}}$
(D2) Homokline Bif	$O(1)$	$O(\ln( K - K_{Bif} ))$

Zusammenfassung Laser:

- Laserschwelle ist eine Stimmgabel Bifurkation
  - Normalform herleiten über störungstheoretischen Vielzeiteransatz <sup>4.2.2.</sup>
  - Laserspiking beschreibbar durch asymptotische Entwicklung der Gleichungen (nach Ordnungen von  $\sqrt{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{T}}$ )
- Lösung mit Poincaré-Lindstedt <sup>4.3.2.</sup> Methode mit gestreckter Zeit  $\tau = \omega(\epsilon)T$

- optische Rückkopplung verursacht neue Bifurkationen und destabilisiert (meist) den Laser
  - Lösungen (ECM) entstehen in Sattel-Knoten Bif. und liegen auf einer Ellipse im Plot (Integrieren über Frequenz)



- Erste Hopf Bifurkation analytisch bestimmbar

$$k_H \approx \frac{\Gamma_{RO}}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

- ausgeschlossen  
- Periodenverdopplungskaskade ins Chaos

- Bistabilität tritt auf zwischen stabilen Lösungen und chaotischen Attraktoren

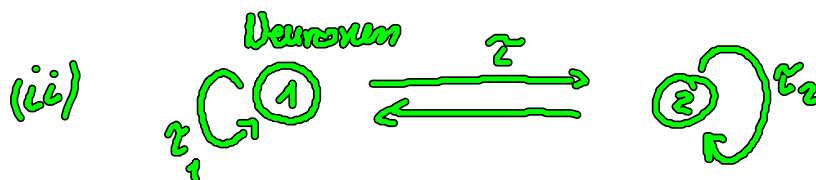
## 5. Gekoppelte Systeme und Netzwerke

### 5.1. 2 gekoppelte Systeme



$\tau \neq 0$  Signallaufzeit

Fragestellung z.B. wann sind beide Laser synchronisiert



$\tau \neq 0$  durch neuronale Kopplung

als Startpunkt einfaches Modell für Systeme

# subkritische Hopf - Normalformen

komplexe Größe  
 $z = x + iy \in \mathbb{C}$

Systemgleichungen

$$\dot{z}_1 = (\lambda + i\omega + (1 + i\gamma) |z_1|^2) z_1 + \alpha (z_2 - z_1)$$

$$\dot{z}_2 = (\lambda + i\omega + (1 + i\gamma) |z_2|^2) z_2 + \alpha (z_1 - z_2)$$

diffusive  
Kopplung